

Programación 2026

Proyectos finales

21 de octubre 2026

Problema 1: Las ecuaciones dinámicas epidemiológicas vienen dada por un modelo de susceptible(S)-infectado(I)-recuperado(R) cuyas ecuaciones son:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{IS}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{IS}{N} - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (3)$$

$$(4)$$

donde $N = S + I + R$ es la población, β es la razón de contagio y γ es la razón de recuperación.

1. Integre las ecuaciones con RK4 para $N = 1000$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $\beta = 0.3$ y $\gamma = 0.1$ (en días⁻¹) y grafique $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$.
2. Verifique numéricamente que $S + I + R = N$ se conserva y estudie cómo varía el error con el paso dt .
3. Calcule el número reproductivo básico $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ y muestre que hay brote (es decir, I crece al inicio) sólo si $\mathcal{R}_0 S(0)/N > 1$. Pruebe con valores de β a ambos lados del umbral.
4. Determine el pico de infectados y el día en que ocurre, y compárelo con

$$I_{\text{máx}} = N \left[1 - \frac{1 + \ln \mathcal{R}_0}{\mathcal{R}_0} \right], \quad (5)$$

válido si $I(0) \ll N$.

5. Simule una cuarentena: haga que β se reduzca a la mitad a partir de cierto día y compare las curvas de $I(t)$ con y sin medida.
6. Grafique la fracción de la población que termina infectada, $R(\infty)/N$, en función de $\mathcal{R}_0$.

Problema 2: La ecuación del de van der Pol corresponde a un oscilador con amortiguamiento no lineal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (6)$$

Este sistema puede ser resuelto numericamente por el método usual, generando una nueva variable y convirtiendolo a uno de primer orden. Con forzado:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x - A \sin(\omega t) = 0 \quad (7)$$

1. Convierta la ecuación a un sistema de primer orden e intégrele con RK4. Grafique $x(t)$ y el retrato de fase $(x, \dot{x})$ para $\mu = 0.1, 1, 5$ y varias condiciones iniciales (dentro y fuera de la órbita final).
2. Estudie si las trayectorias, partiendo de distintas condiciones iniciales, convergen a una misma curva cerrada (ciclo límite) y cómo cambia su forma con μ .
3. Mida el período de la oscilación en función de μ y grafique el resultado.
4. Con forzado, fije k y A , barra ω y grafique la amplitud de la respuesta en el estado estacionario. Identifique la resonancia.
5. Para amplitudes A grandes, busque regímenes donde la respuesta no sea periódica. Construya la sección estroboscópica, muestreando $(x, \dot{x})$ en los instantes $t_n = 2\pi n/\omega$.
6. Verifique la convergencia de la solución al disminuir dt .

Problema 3: Modelo de Lorenz extendido:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz + w, \\ \frac{dw}{dt} &= -kw + h, \\ \frac{dh}{dt} &= -ch + dw,\end{aligned}$$

donde x, y, z, w, h son las variables y σ, r, b, k, c, d son los coeficientes.

1. Integre con RK4 usando $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ y valores de k, c, d de orden uno. Grafique las proyecciones $(x, y), (x, z)$ y la trayectoria en 3D.
2. Muestre que con $w(0) = h(0) = 0$ se recupera el sistema de Lorenz clásico, y verifíquelo numéricamente.
3. Analice el subsistema lineal para (w, h) : calcule los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ d & -c \end{pmatrix} \quad (8)$$

y determine para qué valores de los coeficientes w y h decaen o crecen. Compruebe la predicción numéricamente.

4. Estudie el efecto de condiciones iniciales $w(0), h(0) \neq 0$ sobre el atractor.
5. Sensibilidad a las condiciones iniciales: integre dos trayectorias que difieran en 10^{-8} , grafique la distancia entre ambas en escala semilogarítmica y estime a partir de la pendiente el mayor exponente de Lyapunov. Compárelo con el del sistema de Lorenz clásico.
6. Verifique la convergencia al disminuir dt y discuta hasta qué tiempo es confiable una trayectoria individual.

Problema 4: El potencial de Henon-Heiles, originalmente propuesto para estudiar órbitas estelares, está dado por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

La fuerza entonces que actúa sobre el cuerpo está dada por

$$\begin{aligned} F_x &= -x - 2xy \\ F_y &= y - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones resultante entonces usando la tercera ley de Newton es

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{F_x(x, y, v_x, v_y)}{m} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{F_y(x, y, v_x, v_y)}{m} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y. \end{aligned}$$

1. Tome $m = 1$ y grafique las curvas de nivel de $V(x, y)$. Identifique la región ligada para $E < 1/6$.
2. Integre con RK4 y verifique la conservación de la energía $E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + V(x, y)$. Grafique el error relativo en función del tiempo y de dt .
3. Para $E = 1/12, 1/8$ y $1/6$ elija condiciones iniciales con $x = 0$, valores de y y v_y , y obtenga $v_x > 0$ a partir de E . Grafique las trayectorias en el plano (x, y) .
4. Construya la sección de Poincaré: registre (y, v_y) cada vez que la trayectoria cruza $x = 0$ con $v_x > 0$, interpolando entre los pasos que encierran el cruce. Compare las tres energías y distinga trayectorias regulares (curvas cerradas) de caóticas (nubes de puntos).
5. Para $E > 1/6$ muestre que algunas partículas escapan del pozo.

Problema 5: Scattering. Suponga una partícula que se mueve en un potencial 2-D dado por

$$V(x, y) = x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]. \quad (9)$$

Las ecuaciones del movimiento de la partícula son:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2y^2 x(1 - x^2) \exp[-(x^2 + y^2)] \quad (10)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2x^2 y(1 - y^2) \exp[-(x^2 + y^2)] \quad (11)$$

1. Tome $m = 1$ y grafique las curvas de nivel de $V(x, y)$. Identifique los cuatro máximos y las rectas $x = 0$, $y = 0$ donde $V = 0$.
2. Lance partículas desde $x_0 = -4$ con velocidad $(v_0, 0)$ y parámetro de impacto $y_0 = b$. Integre con RK4 hasta que la partícula se aleje de la región del potencial y calcule el ángulo de dispersión final $\theta_s = \arctan(v_y/v_x)$.
3. Verifique la conservación de la energía a lo largo de las trayectorias.
4. Grafique $\theta_s(b)$ para varias energías $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ por debajo y por encima del máximo de V .
5. Identifique zonas de b donde θ_s cambia de forma muy abrupta, amplíe la escala en esa zona y discuta la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Problema 6: La ecuación del péndulo de longitud L incorporando disipación y un forzado ondulatorio viene dada por

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \beta \frac{d\theta}{dt} + A \cos(\omega t) \quad (12)$$

1. Escriba la ecuación como sistema de primer orden y resuélvala con RK4 tomando $g/L = 1$, $\beta = 0.5$ y $\omega = 2/3$. Grafique $\theta(t)$, llevando θ al intervalo $[-\pi, \pi]$ cuando corresponda.
2. Con $A = 0$, verifique el decaimiento de la energía y compare la envolvente de las oscilaciones pequeñas con $e^{-\beta t/2}$.
3. Con A entre 0.9 y 1.5, grafique el retrato de fase $(\theta, \dot{\theta})$ y distinga movimientos periódicos, de período múltiple y caóticos.
4. Construya la sección de Poincaré estroboscópica, muestreando $(\theta, \dot{\theta})$ en $t_n = 2\pi n/\omega$ luego de descartar el transitorio.
5. Construya un diagrama de bifurcación: grafique $\dot{\theta}(t_n)$ en función de A .
6. En el régimen caótico, integre dos trayectorias con condiciones iniciales que difieran en 10^{-6} y grafique la distancia entre ambas en función del tiempo.

Problema 7: Considere la dinámica de N vórtices en dos dimensiones modelados como vórtices puntuales sin viscosidad. Los vórtices en 2D satisfacen un conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1, i \neq j} \frac{\omega_i (y_j - y_i)}{r_{ij}^2} \quad (13)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1, i \neq j} \frac{\omega_i (x_j - x_i)}{r_{ij}^2} \quad (14)$$

$$(15)$$

donde (x_j, y_j) es la posición del vórtice j -ésimo, ω_j es la vorticidad (positivo rota en sentido de contrario a las agujas del reloj) y r_{ij} es la distancia entre los vórtices i y j ,

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (16)$$

Para $N = 4$, integre las ecuaciones utilizando como condición inicial $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$, es decir que los vórtices están en las esquinas de un cuadrado cada uno con $\omega = 1$. Grafique la posición de dos vórtices en función del tiempo para tiempos suficientemente largos.

1. Resuelva el caso pedido, $N = 4$ con RK4, y grafique las trayectorias de los cuatro vórtices en el plano y la posición de dos de ellos en función del tiempo.
2. Verifique la conservación de las cantidades invariantes: el centro de vorticidad $\sum_i \omega_i x_i / \sum_i \omega_i$ (y su análogo en y), $\sum_i \omega_i (x_i^2 + y_i^2)$ y el hamiltoniano $H \propto -\sum_{i < j} \omega_i \omega_j \ln r_{ij}$. Grafique el error relativo de cada una y úselas para validar el código.
3. Estudie la estabilidad de la configuración cuadrada: perturbe las posiciones iniciales en ϵ y mida cómo crece la distancia a la trayectoria sin perturbar.
4. Con $N = 2$, compare con la solución exacta: dos vórtices iguales giran alrededor de su centro con velocidad angular $\omega/(\pi d^2)$ (d es la distancia entre ellos), y un par con vorticidades opuestas se traslada con velocidad $\omega/(2\pi d)$.
5. Investigue al menos dos configuraciones adicionales con $N = 4$ (por ejemplo, vorticidades distintas o posiciones iniciales asimétricas) y compare con el caso del cuadrado.
6. Verifique la convergencia al disminuir dt .

Problema 8: El movimiento de un péndulo doble con masas iguales m y longitudes iguales l se rige por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) \left(\frac{g}{l} \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) - \left(2 \frac{g}{l} \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right)}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (17)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) \left(2 \frac{g}{l} \sin(\theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) - 2 \left(\frac{g}{l} \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right)}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (18)$$

Donde θ_1 representa el ángulo entre la vertical que pasa por el eje del péndulo y la barra que une el eje con m_1 y θ_2 el ángulo entre la vertical que pasa por m_1 y la barra que la une con m_2 .

1. Escriba el sistema como ecuaciones de primer orden e intégrele con RK4 tomando $g/l = 1$. Grafique $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ y las posiciones de ambas masas.
2. Para ángulos pequeños, verifique que las frecuencias de los dos modos normales son $\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2}) g/l$.
3. Obtenga la expresión de la energía total del sistema y verifique su conservación para amplitudes pequeñas y grandes. Estudie cómo varía el error con dt .
4. Con ángulos iniciales grandes, integre dos trayectorias que difieran en 10^{-6} en θ_1 , grafique la distancia entre ambas en escala semilogarítmica y estime el exponente de Lyapunov.
5. Con velocidades iniciales nulas, construya un mapa en el plano $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ del tiempo que tarda la masa inferior en dar su primera vuelta completa ($|\theta_2| > \pi$) y discuta las regiones que aparecen.
6. Realice una animación del movimiento con `matplotlib.animation.FuncAnimation`.

Problema 9: Un cohete escapando de la Tierra en ascenso vertical puede modelarse como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{2} K \rho_0 e^{h/h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 \quad (19)$$

Donde h es la altura del cohete respecto a la superficie terrestre, r es la distancia al centro de la Tierra y el primer término del miembro derecho deriva de la energía potencial gravitatoria típica de mecánica clásica. Sobre el segundo término: h_0 es la altura hasta la que llega la atmósfera, ρ_0 es la densidad de la atmósfera en la superficie terrestre y K es una constante tal que $K = A \cdot C_d$ siendo d un valor que típicamente va entre 0.1 y 0.3 para objetos aerodinámicos y A el área transversal del cohete.

1. Use $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, radio terrestre $R_T = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$, $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ y $h_0 \approx 8.5 \text{ km}$, y fije K con valores razonables que deberá justificar. Con $r = R_T + h$, integre con RK4 para distintas velocidades iniciales v_0 .
2. Sin rozamiento ($K = 0$), compare con la solución por conservación de la energía: la altura máxima y la velocidad de escape $v_{esc} = \sqrt{2GM/R_T}$.
3. Con rozamiento, determine por bisección la mínima velocidad inicial con la que el cohete escapa y compárela con v_{esc} .
4. Grafique $h(t)$ y $v(t)$, y compare, en función de la altura, la magnitud de la aceleración gravitatoria con la del rozamiento. A qué altura deja de importar la atmósfera?
5. Compare con el modelo de gravedad constante g , para el cual $h_{\text{máx}} = v_0^2/2g$, y muestre cuándo deja de ser válido.

6. Estudie cómo varía la altura máxima con K .

Problema 10: El mapa de Henon es un sistema dinámico discreto que está descrito por las ecuaciones:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (20)$$

$$y_{n+1} = b \cdot x_n \quad (21)$$

donde a y b son constantes. Para ciertos parámetros tales como $a = 1.4$ y $b = 0.3$ el sistema es caótico mientras para $a = 1.2$ y $b = 0.3$. Investigue para qué rangos de parámetros la solución es caótica. Demuestre para dos casos particulares la sensibilidad a las condiciones iniciales.

1. Itere el mapa con $a = 1.4$, $b = 0.3$ (descartando un transitorio de unos 10^3 pasos) y grafique el atractor. Haga ampliaciones sucesivas de una zona y observe su estructura.
2. Calcule analíticamente los puntos fijos y su estabilidad a partir de los autovalores del jacobiano

$$\begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

y verifíquelo numéricamente.

3. Con $b = 0.3$, construya un diagrama de bifurcación: grafique x_n (luego del transitorio) en función de a en $[0.2, 1.4]$.
4. Estime el mayor exponente de Lyapunov en función de a (por ejemplo, con dos trayectorias que se renormalizan a distancia fija en cada paso). Identifique los rangos de a con $\lambda > 0$ y compárelos con el diagrama de bifurcación.
5. Para dos casos particulares (uno periódico y otro caótico), tome condiciones iniciales que difieran en 10^{-10} y grafique la distancia entre ambas trayectorias en función de n en escala semilogarítmica.
6. Opcional: construya un mapa de colores de $\lambda(a, b)$ para a y b en un rango adecuado.

Problema 11: Osciladores acoplados. Considere dos masas iguales m unidas a soportes fijos mediante resortes de constante elástica k y acopladas entre sí mediante un resorte de constante k_c . Los desplazamientos respecto de las posiciones de equilibrio se representan mediante x_1 y x_2 . Las ecuaciones de movimiento son

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 - k_c(x_1 - x_2), \quad (23)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_c(x_2 - x_1). \quad (24)$$

Implemente una clase `OsciladoresAcoplados` que permita calcular las aceleraciones y una clase `Integrador` para resolver las ecuaciones mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

1. Simule el movimiento para distintas condiciones iniciales y grafique $x_1(t)$ y $x_2(t)$.
2. Calcule las frecuencias normales teóricas y compárelas con las obtenidas numéricamente.
3. Grafique las trayectorias en el espacio de fases y estudie los modos normales correspondientes al movimiento en fase y en contrafase.
4. Calcule la energía cinética, la energía potencial y la energía total del sistema. Analice su variación temporal para distintos pasos de integración.

5. Estudie cómo cambia el intercambio de energía entre las masas al variar la constante de acoplamiento k_c .

Problema 12: Oscilador no lineal forzado. Considere el oscilador de Duffing, cuya ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t), \quad (25)$$

donde δ es el coeficiente de amortiguamiento, α y β determinan la fuerza restauradora, y F y ω son la amplitud y la frecuencia angular del forzante externo. Implemente una clase `OsciladorDuffing` y resuelva las ecuaciones mediante RK4.

1. Grafique $x(t)$ y la trayectoria en el espacio de fases $(x, \dot{x})$ para distintos valores de los parámetros.
2. Compare las soluciones para $\beta = 0$ y $\beta \neq 0$, analizando las diferencias entre el oscilador lineal y el no lineal.
3. Construya diagramas de Poincaré tomando muestras de la trayectoria a intervalos iguales al período del forzante.
4. Varíe la amplitud F y estudie los cambios en las trayectorias y en los diagramas de Poincaré.
5. Para un conjunto de parámetros adecuado, perturbe ligeramente las condiciones iniciales y analice la separación entre las trayectorias obtenidas. Investigue si el sistema presenta comportamiento caótico.

Problema 13: Difusión del calor en una barra. Considere una barra unidimensional de longitud L cuya temperatura $T(x, t)$ evoluciona según la ecuación de difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (26)$$

donde κ es la difusividad térmica. Discretice el dominio espacial mediante N puntos separados por una distancia Δx y aproxime la derivada segunda mediante diferencias finitas. Para los puntos interiores se obtiene el esquema explícito

$$T_i^{n+1} = T_i^n + r (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n), \quad r = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad (27)$$

donde Δt es el paso temporal. Implemente una clase `Barra` que almacene las temperaturas, los parámetros físicos y las condiciones de contorno, y que permita evolucionar el sistema en el tiempo.

1. Considere una barra inicialmente a temperatura uniforme, excepto en una región localizada. Grafique los perfiles $T(x, t)$ para distintos instantes.
2. Estudie la evolución temporal de la temperatura para diferentes condiciones iniciales y de contorno.
3. Analice la estabilidad numérica al variar Δt y Δx . Verifique la condición de estabilidad $r \leq 1/2$ del esquema explícito.
4. Compare la solución numérica con una solución analítica para una condición inicial sencilla.
5. Estudie cómo cambia la solución al aumentar la resolución espacial y determine el error en función de Δx y Δt .

Problema 14: Caminatas aleatorias y difusión. Considere una partícula que se mueve en dos dimensiones realizando pasos de longitud constante ℓ , con direcciones aleatorias. La posición de la partícula luego de n pasos satisface

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \ell \begin{pmatrix} \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{pmatrix}, \quad (28)$$

donde los ángulos θ_n se extraen de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$. Implemente una clase **CaminataAleatoria** que genere trayectorias y permita controlar la cantidad de pasos y la semilla del generador de números aleatorios.

1. Grafique las trayectorias de varias partículas que parten del origen.
2. Calcule el desplazamiento cuadrático medio en función del número de pasos y compárelo con el resultado teórico

$$\mathbb{E} [|\vec{r}_n - \vec{r}_0|^2] = n\ell^2. \quad (29)$$

3. Genere muchas realizaciones independientes y construya histogramas de las posiciones finales en ambas direcciones. Analice cómo cambian las distribuciones al aumentar el número de pasos.
4. Repita los experimentos para distintas longitudes de paso y cantidades de partículas. Estudie la dispersión de los resultados y la convergencia de los promedios.
5. Modifique el modelo para introducir una dirección preferencial en los pasos. Compare las trayectorias y el desplazamiento cuadrático medio con los del caso isotrópico.

Problema 15: Análisis de señales y estimación de frecuencias. Considere una señal temporal formada por una oscilación sinusoidal contaminada por ruido:

$$y(t) = A \cos(2\pi ft + \phi) + \epsilon(t), \quad (30)$$

donde A es la amplitud, f la frecuencia, ϕ la fase inicial y $\epsilon(t)$ representa el error de medición. Implemente una clase **GeneradorSeñales** que permita generar datos sintéticos con distintos parámetros y niveles de ruido, y una clase **AnalizadorSeñales** que permita estudiar los datos mediante herramientas de NumPy y Matplotlib.

1. Genere señales para distintas amplitudes, frecuencias y niveles de ruido. Grafique los datos y compare las señales originales con las observaciones.
2. Utilice la transformada discreta de Fourier para estimar la frecuencia dominante. Compare la estimación con el valor utilizado para generar los datos.
3. Estudie cómo influye la duración del registro y la frecuencia de muestreo en la estimación de la frecuencia. Analice el fenómeno de aliasing.
4. Repita el experimento para distintas realizaciones del ruido y construya un histograma de los errores de estimación. Analice cómo varían el sesgo y la dispersión al cambiar la amplitud del ruido.
5. Considere una señal compuesta por dos frecuencias próximas. Determine bajo qué condiciones es posible distinguir ambas contribuciones mediante el análisis de Fourier.

Problema 16: Vibraciones con múltiples resortes. Suponga una red de partículas con resortes ubicados en línea los cuales producen desplazamientos horizontales alrededor de su equilibrio dado por x_i con $i = 1, \dots, N$ donde N es la cantidad de resortes. Las ecuaciones de movimiento de las partículas:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) + F_1 \quad (31)$$

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = k(x_{i+1} - x_i) + F_i \quad (32)$$

$$m \frac{d^2 x_N}{dt^2} = k(x_{N-1} - x_N) + F_N \quad (33)$$

donde m es la masa, k es la constante del resorte y F_i es la fuerza externa sobre la masa i . Resolver con RK4 con $m = 1$, $k = 6$ y la $F_1 = \cos(\omega t)$. Comparar los casos $N = 5$, $N = 10$.

1. Resuelva con RK4 para $N = 5$ y $N = 10$ con $m = 1$, $k = 6$ y $F_1 = \cos(\omega t)$, $F_i = 0$ para $i \neq 1$.
2. Con $F = 0$ verifique la conservación de la energía

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} k (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (34)$$

3. Escriba el sistema en forma matricial $\ddot{\vec{x}} = -\frac{k}{m} \mathbf{K} \vec{x}$, calcule las autofrecuencias y los modos normales con `numpy.linalg.eigh` y grafique los modos.
4. Barra ω , mida la amplitud o energía de la respuesta y compruebe que los picos coinciden con las autofrecuencias.
5. Para ω cercana a una resonancia y lejos de ella, grafique $x_i(t)$ como un mapa de colores en el plano (masa i , tiempo) y describa lo que se observa.
6. Compare $N = 5$ y $N = 10$: cantidad de picos, separación entre autofrecuencias y forma de los modos.

F@CENA © 2026