# Programación 2024

## Proyectos finales

20 de noviembre 2024

**Problema 1:** Las ecuaciones dinámicas epidemiológicas vienen dada por un modelo de susceptible(S)-infectado(I)-recuperado(R) cuyas ecuaciones son:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\frac{IS}{N} \tag{1}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{IS}{N} - \gamma I \tag{2}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

donde $N = S + I + R$ es la población, $\beta$ es la razón de contagio y $\gamma$ es la razón de recuperación.

**Problema 2:** La ecuación del de van der Pol correesponde a un oscilador con amortiguamiento no lineal:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \tag{5}$$

Este sistema puede ser resuelto numericamente por el método usual, generando una nueva variable y conviertiendolo a uno de primer orden. Con forzado:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x - A\sin(\omega t) = 0 \tag{6}$$

**Problema 3:** Modelo de Lorenz extendido:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x),\\
\frac{dy}{dt} &= rx - y - xz,\\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz + w,\\
\frac{dw}{dt} &= -kw + h,\\
\frac{dh}{dt} &= -ch + dw,
\end{aligned}$$

donde $x$, $y$, $z$, $w$, $h$ son las variables y $\sigma$, $r$, $b$, $k$, $c$, $d$ son los coeficientes.

**Problema 4:** El potencial de Henon-Heiles, originalmente propuesto para estudiar órbitas estelares, está dado por

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

La fuerza entonces que actúa sobre el cuerpo está dada por

$$F_x = -x - 2xy$$
$$F_y = y - x^2 - y^2.$$

El sistema de ecuaciones resultante entonces usando la tercera ley de Newton es

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(x, y, v_x, v_y)}{m}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{F_y(x, y, v_x, v_y)}{m}$$
$$\frac{dx}{dt} = v_x$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y.$$

**Problema 5:** Scattering. Suponga una partícula que se mueve en un potencial 2-D dado por

$$V(x, y) = x^2y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]. \tag{7}$$

Las ecuaciones del movimiento de la particula son:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2y^2x(1 - x^2)\exp[-(x^2 + y^2)] \tag{8}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2x^2y(1 - y^2)\exp[-(x^2 + y^2)] \tag{9}$$

**Problema 6:** La ecuación del péndulo de longitud $L$ incorporando disipacion y un forzado ondulatorio viene dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \beta\frac{d\theta}{dt} + A\cos(\omega t) \tag{10}$$

**Problema 7:** Considere la dinámica de N vórtices en dos dimensiones modelados como vórtices puntuales sin viscocidad. Los vórtices en 2D satisfacen un conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1, i\neq j}\frac{\omega_i(y_j - y_i)}{r_{ij}^2} \tag{11}$$
$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1, i\neq j}\frac{\omega_i(x_j - x_i)}{r_{ij}^2} \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

donde $(x_j, y_j)$ es la posición del vórtice j-esimo, $\omega_j$ es la vorticidad (positivo rota en sentido de contrario a las agujas del reloj) y $r_{ij}$ es la distancia entre los vórtices $i$ y $j$,

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \tag{14}$$

Para $N = 4$, integre las ecuaciones utilizando como condición inicial $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$, es decir que los vórtices están en las esquinas de un cuadrado cada uno con $\omega = 1$. Grafique la posición de dos vórtices en función del tiempo para tiempos suficientemente largos.