

Dinámica de Fluidos Geofísicos

Guía 1: Ecuaciones de movimiento.

Agosto de 2026

Problema 1: Suponga que tenemos una propiedad ψ en 1D que varía linealmente con la posición $\psi = Ax$ para un tiempo fijo y además sabemos que $\partial_t \psi = B$. Calcule el cambio total de ψ si el fluido tiene una velocidad u constante conocida. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad u para que la ψ se conserve para un elemento material (i.e. la derivada material sea nula)?

Problema 2: Regla de Leibnitz de la razón de cambio de una integral. Demuestre que en una dimensión vale que:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \Psi(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \Psi dx + \frac{dx_2}{dt} \Psi(x_2, t) - \frac{dx_1}{dt} \Psi(x_1, t). \quad (1)$$

Problema 3: Teorema de transporte de Reynold. Demuestre que si tenemos una propiedad $\Psi(\mathbf{x}, t)$ que esta definida adentro de un volumen $V(t)$ el cual esta cambiando con el tiempo, entonces el cambio temporal de la propiedad total dentro del volumen viene dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Psi dV(t) = \int_{V(t)} \partial_t \Psi dV(t) + \int_{S(t)} \Psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de los puntos en la frontera del volumen. Para la demostración, comience demostrando el caso unidimensional de un fluido en una caja de límites variables, con velocidades u_I , u_D y luego extienda al resultado a tres dimensiones.

Problema 4: Demostrar que $\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}$. Físicamente esto significa que el cambio del volumen *material* δV_L con el tiempo es $\frac{d\delta V_L}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \delta V_L$. No utilizar al principio de conservación de la masa en la demostración.

Problema 5: Demostrar el teorema de transporte que establece que una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva (por unidad de masa) es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ satisface

$$d_t \int_{V_L} \rho \gamma dV_L = \int_{V_L} \rho D_t \gamma dV_L \quad (3)$$

teniendo en cuenta que la densidad ρ satisface la ecuación de conservación de la masa.

Problema 6: Demostrar usando un marco Lagrangiano que si tenemos una propiedad extensiva (e.g. salinidad, energía, momento) cuya cantidad intensiva es $\gamma(\mathbf{x}, t)$ (e.g. salinidad, energía,

momento por unidad de masa) que posee una fuente por unidad de volumen y tiempo, Q , entonces la evolución de dicha cantidad es gobernada por la ley:

$$\rho D_t \gamma = Q \quad (4)$$

Ayuda: obtenga primero una expresión integral para el cambio total de la propiedad extensiva en un sistema Lagrangiano.

Problema 7: Demostrar usando un marco Euleriano, en forma similar a como se demostró la conservación de la masa en un marco Euleriano, que la cantidad γ satisface:

$$\partial_t(\rho\gamma) + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) = Q \quad (5)$$

Problema 8: Demostrar que las leyes de conservación para la cantidad intensiva, γ , cuya fuente es Q ,

$$\begin{aligned} \rho D_t \gamma &= Q \quad y \\ \partial_t(\rho\gamma) + \nabla \cdot (\rho\gamma\mathbf{u}) &= Q, \end{aligned}$$

son equivalentes si la masa se conserva.

Problema 9: Demostrar que las líneas de corriente en un flujo son el conjunto de funciones de corriente constantes.

Problema 10: Demostrar que el flujo de masa de un fluido con $\rho = cte$ en un contorno cerrado es nulo. A partir de esta demostración fundamente que la función ψ únicamente depende de los puntos extremos y no del camino.

Problemas advectivos.

Problema 11: Sea una chimenea ubicada en la superficie de la tierra que en $t = 0$ comienza a emitir como $Q(x, t) = A \exp[\sigma_x^{-2} x^2] \text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$ en una atmósfera en reposo, determine la densidad de humo en función del tiempo. ¿Cuál es la razón de cambio local y material del humo en $x = 0$ y en $x = \sigma_x/4$?

Problema 12: Al otro día la chimenea vuelve a emitir de la misma manera, $Q(x, t) = A \exp[\sigma_x^{-2} x^2] \text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$, pero ahora corre un viento de 5m s^{-1} . ¿Cuál es la razón de cambio local y material del humo en $x = 0$ y en $x = \sigma_x/4$?

Problema 13: En un instante de tiempo se observa que una sustancia inerte tiene una distribución $q(x)$ determine cual será la distribución de la sustancia en función del tiempo si se tiene un viento constante u_0 . Use la intuición, en última instancia use teoría de Fourier.

Problema 14: En $x = 0$ se ha puesto un estación meteorológica que ha medido el CO2 siendo la distribución temporal $q(t)$, $t > 0$, determine cuál será la distribución de CO2 para $x > 0$ si existe un viento constante $u(x, t) = u_0 > 0$. Asuma que inicialmente no hay CO2. Use la intuición, en última instancia use transformada de Fourier.

Problema 15: Utilice el método de la función de Green para determinar la distribución de una sustancia inerte q cuya fuente por unidad de tiempo es Q asuma que no existe sustancia en $t \rightarrow -\infty$, $q(x, t \rightarrow -\infty) = 0$. La velocidad es $u(x, t) = u_0$. ¿Qué sucede si existe una condición inicial $q(x, 0)$? Compruebe los resultados de los problemas anteriores.
Muy linda forma de resolverlo: math.stackexchange.com

GICA © 2026