Dinámica de Fluidos Geofísicos

Manuel Pulido
Deparmento de Física,
Universidad Nacional del Nordeste
pulido@unne.edu.ar

10 Aug 26

Contenidos

3 Ajuste bajo gravedad y rotación **3**

3.1 Sistemas de coordenadas rotantes 3

3.1.1 Razón de cambio de un vector en coordenadas rotantes 3

3.1.2 Razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante 4

3.2 Ecuación de conservación de momento sobre la tierra 5

3.3 Aproximación cartesiana del plano tangente 6

3.4 Balance geostrófico 7

3.5 Cambio de coordenada vertical 8

3.5.1 Presión como coordenada vertical 8

3.6 Viento térmico 9

3.7 Circulación y vorticidad 10

3.8 Teorema de circulación de Kelvin 11

3.9 Generalización del teorema de circulación de Kelvin 12

3.10 Conservación de la vorticidad potencial en aguas poco profundas 12

3.11 Ajuste bajo gravedad y rotación 14

3.12 Adimensionalización de las ecuaciones de aguas poco profundas 17

3.13 Ondas de gravedad inerciales 20

3.14 Ecuación de evolución de la vorticidad 21

3.15 Conservación de la vorticidad potencial 22

3.16 Ondas de Rossby o planetarias 23

Capítulo 3

Ajuste bajo gravedad y rotación

En el capítulo 2 hemos estudiado la respuesta del fluido en un campo gravitatorio a una perturbación ocasionada por causas externas, el fluido responde a este forzado externo distribuyendo la energía. Por ejemplo en un estanque los excesos de energía potencial son eliminados a través de ondas superficiales que se propagan hacia el infinito. En todo momento en el proceso de ajuste supusimos que el sistema de referencia era inercial.

Sin embargo la tierra esta rotando por lo cual si establecemos un sistema de referencia fijo en ella, éste no es un sistema inercial. En este sistema no-inercial se deben considerar fuerzas ficticias que equilibren la aceleración del sistema.

Una vez establecidas las ecuaciones de la evolución de un fluido en un sistema de coordenadas rotante, estudiaremos como ocurren los procesos de ajuste en estos sistemas los cuales difieren de forma notable del proceso de ajuste en sistemas no-rotante.

3.1 Sistemas de coordenadas rotantes

3.1.1 Razón de cambio de un vector en coordenadas rotantes

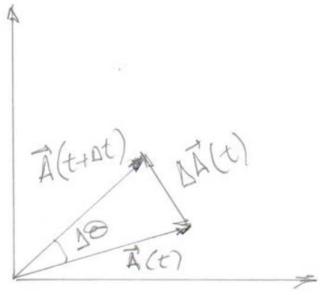


Figura 3.1: Vector en rotación con velocidad de rotación perpendicular al plano.

Comencemos por analizar como cambia temporalmente un vector que se encuentra rotando. El cambio de la magnitud de un vector arbitrario $\mathbf{A}$ que se encuentre rotando con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$ viene dado por

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}\right| = |\mathbf{A}| \sin\phi \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{3.1}$$

donde $|\mathbf{A}| \sin\phi$ es la componente del vector $\mathbf{A}$ perpendicular a $\mathbf{\Omega}$. La dirección es perpendicular a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Omega}$.

Por lo que en forma vectorial se deduce

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \tag{3.2}$$

Calculemos ahora el cambio de un vector $\mathbf{B}$ que se encuentra en un sistema de coordenadas que esta rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$. El vector $\mathbf{B}$ en el sistema rotante viene dado por $\mathbf{B} = B_j\mathbf{i}_j$ luego la razón de cambio en este sistema es

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}_j \tag{3.3}$$

Si estamos en un sistema fijo no solo veremos que las componentes de $\mathbf{B}$ cambian sino también los versores debido a que estan en rotación con respecto al sistema inercial por lo tanto

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}_j + B_j\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_j}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

Usando (3.2), $\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_j}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times i_j$ luego si reemplazamos en (3.4) y teniendo en cuenta (3.3)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} \tag{3.5}$$

Si ahora interpretamos a $\mathbf{B}$ como el vector posición de una partícula $\mathbf{r}$, entonces la velocidad esta definida por $\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ se obtiene

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \tag{3.6}$$

la velocidad de una partícula en el sistema inercial viene dada por la velocidad en el sistema rotante mas el término que determina los cambios temporales debido a la rotación del sistema de referencia.

3.1.2 Razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante

Si ahora pensamos en el vector velocidad $\mathbf{u}_I$ referenciado en el sistema inercial, entonces su cambio viene dado por (3.5)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_I}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \tag{3.7}$$

Reemplazando (3.6) en (3.7)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left[\frac{\mathrm{d}(\mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{\mathrm{d}t}\right]_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{3.8}$$

Asumiendo que la velocidad angular no cambia con el tiempo la expresión resultante es

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{3.9}$$

El segundo término $2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}_R$ representa la aceleración de Coriolis. Esta aceleración es en todo momento perpendicular a la velocidad. El tercer término de (3.9), $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R} = -\Omega^2\mathbf{R}$

es la aceleración centrípeta (**R** es el lado opuesto del triángulo que forma **r**, el eje de rotación y la normal a este **R**)

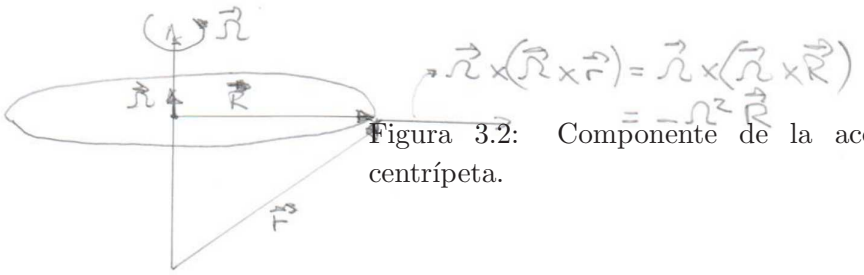


Figura 3.2: Componente de la aceleración centrípeta.

Luego reemplazando la aceleración centrípeta en (3.9) la razón de cambio de la velocidad en un sistema rotante puede ser expresada en la forma

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R - \Omega^2\mathbf{R} \tag{3.10}$$

3.2 Ecuación de conservación de momento sobre la tierra

La desviación de esfericidad que posee la tierra hace que no exista componente tangencial de la aceleración centrípeta. Es decir que la única componente de la aceleración centrípeta es la normal a la superficie. Tenemos entonces que $\mathbf{g}^*$ la aceleración de la gravedad pura apunta hacia el centro de la tierra, sin embargo ésta no esta exactamente en la dirección $\hat{k}$ (la dirección al centro no es perpendicular a la tangencial a la superficie debido a que la tierra es un esferoide). La aceleración centrípeta sumada a la aceleración de la gravedad pura dan una aceleración de la gravedad efectiva (la fuerza de atraccción que sentimos sobre la superficie de la tierra) y es esta gravedad efectiva la que esta en la dirección $\hat{k}$, la cual es perpendicular a la superficie de la tierra,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2\mathbf{R} \tag{3.11}$$

Probablemente si uno considera a la tierra como un fluido que esta rotando la configuración de equilibrio será el esferoide de lo contrario los elementos en la superficie no tienen equilibrio estático y estarían acelerados. Por lo que (especulando) esta sería la razón de que la tierra, teniendo en cuenta que es un sólido deformable, no es una esfera perfecta y es un esferoide.

Partiendo entonces de la ecuación de conservación del momento en un sistema inercial

$$\rho(\mathrm{D}_t\mathbf{u})_I = -\nabla p + \rho\mathbf{g}^* + \mathbf{F}_f \tag{3.12}$$

Luego queremos expresar a la ecuación de conservación del momento en un sistema rotante que este fijo sobre la tierra para esto reemplazamos la aceleración por la expresión de la aceleración en un sistema rotante (3.10) en (3.14) tenemos

$$\rho[(\mathrm{D}_t\mathbf{u})_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \Omega^2\mathbf{R}] = -\nabla p + \rho\mathbf{g}^* + \mathbf{F}_f \tag{3.13}$$

agrupando el término de la aceleración centrípeta con el de la aceleración de la gravedad obtenemos

$$\rho[(\mathrm{D}_t\mathbf{u})_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mathbf{F}_f \tag{3.14}$$

En general si vamos a trabajar con escalas similares a las de la Tierra en un sistema de referencia fijo a la Tierra se debe utilizar coordenadas esféricas, expresando la posición en λ, ϕ, z, longitud, latitud y altura.

Las velocidades en este caso vienen dadas por

$$u = \mathrm{D}_t x = r\cos\phi \mathrm{D}_t \lambda \tag{3.15}$$

$$v = \mathrm{D}_t y = r\mathrm{D}_t \phi \tag{3.16}$$

$$w = \mathrm{D}_t z \tag{3.17}$$

mientras el operador derivada material viene dado por

$$\mathrm{D}_t = \partial_t + \frac{u}{a\cos\phi}\partial_\lambda + \frac{v}{a}\partial_\phi + w\partial_z \tag{3.18}$$

donde a es el radio de la Tierra y se ha asumido que $r = z + a$ con $z \ll a$.

Para calcular las aceleraciones se debe tener en cuenta los cambios temporales en los versores en el sistema de coordenadas esféricas, de esta forma se obtendría el sistema de ecuaciones primitivas en esféricas. Sin embargo, se deja para el lector interesado el desarrollar este conjunto de ecuaciones y evaluar los términos que son apreciables, para corroborar el sistema resultante veáse Vallis (2006) o Andrews et al (1997). En lo que sigue del apunte tomaremos como aproximación un sistema de coordenadas cartesiano.

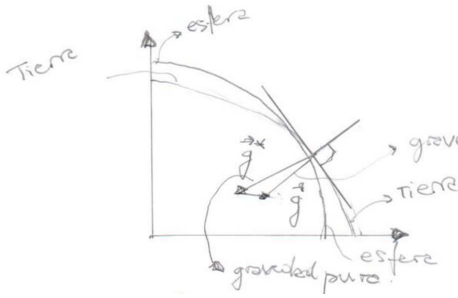


Figura 3.3: Aceleración de la gravedad real g^* y efectiva g teniendo en cuenta el esferoide de la Tierra.

3.3 Aproximación cartesiana del plano tangente

Para evitar trabajar con coordenadas esféricas y cuando los movimientos del fluido no abarcan todo el globo terraqueo es conveniente trabajar en coordenadas cartesianas, para esto lo que se hace es establecer como origen del sistema la latitud ϕ_0 alrededor de la cual se espera analizar los movimientos y asumir un plano tangente a ese punto. El sistema lo ubicamos de tal manera que la coordenada x sea en la dirección Oeste-Este, e y en la dirección Sur-Norte. Dado que consideramos un plano tangente a ϕ_0, la velocidad de rotación de la Tierra alrededor de ese punto es $\Omega\sin\phi_0$, luego las ecuaciones de momento resultantes son:

$$\rho(\mathrm{D}_t u - f_0 v) = -\partial_x p, \tag{3.19}$$

$$\rho(\mathrm{D}_t v + f_0 u) = -\partial_y p, \tag{3.20}$$

$$\rho\mathrm{D}_t w = -\partial_z p - \rho g, \tag{3.21}$$

donde $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ es el denominado parámetro de Coriolis. Esta aproximación es generalmente llamada aproximación del plano f.

Sin embargo, la velocidad de rotación local de la Tierra $\Omega \sin \phi$ varía con la latitud, esto trae aparejado importantes efectos dinámicos tales como la aparición de nuevos modos de oscilación, las ondas de Rossby. Para tener en cuenta estas variaciones se puede considerar el desarrollo de Taylor de la velocidad de rotación local y quedarnos con el orden 0 y 1 en ese desarrollo,

$$f = 2\Omega \sin \phi \approx 2\Omega \sin \phi_0 - 2\Omega(\phi - \phi_0) \cos \phi_0 = f_0 + \beta y, \tag{3.22}$$

donde $\beta = \partial_y f = 2\Omega \cos \phi_0 / a$. Esta aproximación es conocida como del plano beta. Las ecuaciones de conservación del momento son esencialmente las mismas que (3.19)-(3.21), pero cambiando f_0 por $f_0 + \beta y$.

3.4 Balance geostrófico

En el caso de un sistema rotante, si consideramos un flujo que esta en steady-state, y cuyos términos nolineales de las derivadas materiales son nulos, en las ecuaciones de momento horizontal se establece un equilibrio entre la aceleración de Coriolis y el gradiente de presión.

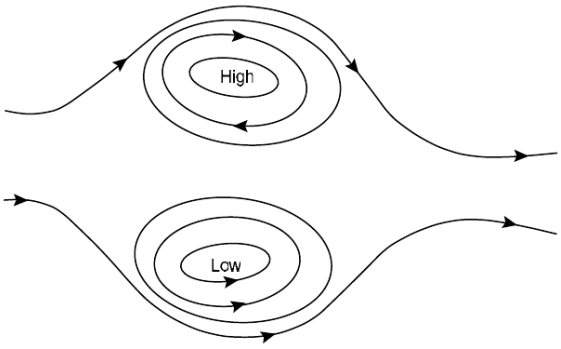
$$-\rho f_0 v = -\partial_x p, \tag{3.23}$$

$$\rho f_0 u = -\partial_y p. \tag{3.24}$$

Este es el denominado balance geostrófico. Este balance es altamente satisfecho, en una primera aproximación, para flujos de gran escala. Por lo que es una herramienta muy útil para establecer restricciones a los flujos en base a los gradientes horizontales de presión. Sin embargo, esta aproximación no nos da la solución steady-state, ya que las ecuaciones, (3.23), (3.24) y ecuación de continuidad, son degeneradas. Es decir, si derivamos en forma cruzada y restamos se obtiene que

$$f_0(\partial_x u + \partial_y v) = \frac{1}{\rho}(-\partial_{xy} p + \partial_{yx} p) = 0 \tag{3.25}$$

por lo que las dos ecuaciones de momento horizontal no son independientes de la ecuación de conservación de la masa, y por lo tanto el problema puede tener múltiples soluciones. Las ecuaciones de balance geostrófico solo nos sirven como un diagnóstico. Para tener ecuaciones de pronóstico es necesario considerar pequeñas variaciones a la geostrofía. Ésta es la que se denomina aproximación quasi-geostrófica.



Lineas de corriente ubicadas alrededor de un centro de alta y baja presión en el hemisferio norte. Para el hemisferio sur los sentidos del flujo son los contrario ya que $f < 0$.

3.5 Cambio de coordenada vertical

En general si tenemos en cuenta la relacion hidrostática y la conservación de la entropía, es conveniente considerar un cambio en la coordenada vertical de la variable z a la variable p o θ de esta forma en general se logra reducir el sistema de ecuaciones y por otro lado simplificar sus expresiones. En la atmósfera por ejemplo dada la variación exponencial de la presión con la altura se suele tomar esta variable como coordenada vertical para movimientos que satisfacen la aproximación hidrostática.

Si cambiamos la coordenada vertical de z por ζ, tal que las variables pasen a depender de x, y, ζ, t, debemos realizar la regla de la cadena para derivar una propiedad ψ en función de x o y (es decir se deben considerar las variaciones $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$). En términos de la variable dependiente se considera que $\psi(x, y, \zeta, t) = \psi(x, y, z(x, y, \zeta, t), t)$ por lo tanto

$$\partial_\zeta \psi = \partial_z \psi$$

$$(\partial_x \psi)_\zeta = (\partial_x \psi)_z + \partial_z \psi \, (\partial_x z)_\zeta \tag{3.26}$$

La derivada material viene dada por

$$\mathrm{D}_t \psi = \partial_t \psi|_{x,y,\zeta} + \mathbf{u} \cdot \nabla_\zeta \psi + u_\zeta \partial_\zeta \psi \tag{3.27}$$

donde ∇_ζ es el operador gradiente horizontal pero manteniendo constante ζ en lugar de z y u_ζ es la velocidad en ζ.

3.5.1 Presión como coordenada vertical

De la ecuación para derivadas parciales horizontales tenemos que

$$(\partial_x p)_z + (\partial_x z)_p \partial_z p = 0 \tag{3.28}$$

de la cual usando la ecuación hidrostática se obtiene

$$(\partial_x p)_z = \rho (\partial_x \Phi)_p \tag{3.29}$$

donde definimos $\Phi = gz$ el geopotencial. Entonces la ecuacion de momento se debe reemplazar

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = \nabla_p \Phi \tag{3.30}$$

Usando la inversa de la derivada, la ecuación hidrostática resultante es

$$\partial_p \Phi = -\rho^{-1} \tag{3.31}$$

Finalmente para la ecuación de continuidad hay dos formas de derivarla, partiendo de la ecuación con z como coordenada vertical y transformando los términos correspondientes, o alternativamente escribiendo la ecuación de conservación de la masa

$$\mathrm{D}_t(\rho \delta V) = 0 \tag{3.32}$$

Las ecuaciones primitivas resultantes son:

$$\mathrm{D}_t \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla_p \Phi \tag{3.33}$$

$$\partial_p \Phi = -\frac{1}{\rho} \tag{3.34}$$

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u} + \partial_p \omega = 0 \tag{3.35}$$

$$\mathrm{D}_t \theta = 0 \tag{3.36}$$

A partir de las ecuaciones si el termino de la aceleración se anula para las ecuaciones dinámicas horizontal se obtiene que

$$\mathbf{f} \times \mathbf{u}_g = -\nabla_p \Phi \tag{3.37}$$

hemos obtenido el balance geostrófico, con $\mathbf{u}_g$ el viento geostrófico y ∇_p el gradiente a presión constante. Usando la presión como coordenada vertical no aparece la densidad en el balance geostrófico.

3.6 Viento térmico

El viento geostrófico debe tener cizalla vertical en la presencia de gradiente de temperatura horizontal. Es decir que se acoplan las derivadas parciales de viento y temperatura para el caso que tenemos por un lado la aproximación geostrófica y por otro lado la aproximación hidrostática.

Si tenemos en cuenta la ecuación histrotática y la relación de los gases ideales para eliminar ρ se obtiene que

$$RT\frac{\mathrm{d}p}{p} = -g\mathrm{d}z$$

Entonces el grosor de una capa queda definido por

$$\delta z = -\frac{R\overline{T}}{g}\frac{\delta \log p}{p}$$

Cuando el aire esta mas caliente este debe ocupar una mayor profundidad para una dada variacion de presión.

Si reexpresamoes (3.6) para dejarlo en funcion del geopotencial $\Phi = gz$, se obtiene

$$\partial_p \Phi = -\frac{RT}{p}$$

Es decir esta es la expresión de la aproximación hidrostática teniendo la presión como coordenada vertical y dejando en función de la temperatura.

Por otro lado usamos el equilibrio geostrófico también con presión como coordenada vertical (3.37), en componentes,

$$\partial_x \Phi = fv$$

$$\partial_y \Phi = -fu$$

Tomamos ahora la derivada parcial con respecto a p,

$$\partial_{xp}\Phi = f\partial_p v$$

$$\partial_{yp}\Phi = -f\partial_p u$$

Notar que en estas coordenadas no aparece la presión en el balance geostrófico. Si usamos la aproximación hidrostática (3.6)

$$\frac{R}{p}\partial_x T = f\partial_p v$$

$$\frac{R}{p}\partial_y T = -f\partial_p u$$

donde hemos usado que estamos en coordenadas de presión (ej. x es independiente de p).

Si pensamos en una coordenada vertical que sea el logaritmo de la presión, $Z_p = -H\log(p/p_R)$ tenemos que

$$\frac{R}{H}\partial_x T = f\partial_{Z_p} v$$

$$\frac{R}{H}\partial_y T = -f\partial_{Z_p} u$$

Entonces el viento termico en realidad es que los gradientes de temperatura producen vertical shear o cizalla.

Falta grafico.

3.7 Circulación y vorticidad

Una variable de mucha importancia en un fluido, que representa una medida de la rotación del fluido, es el rotor de la velocidad denominado vorticidad,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{3.38}$$

La variable macroscópica asociada a la vorticidad es la circulación, la cual se define como la integral de superficie de la vorticidad,

$$C = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{3.39}$$

donde se ha utilizado el teorema de Stokes para expresar la circulación como integral de línea a lo largo del circuito Γ, la curva cerrada que encierra a la superficie S.

Ejemplo. Si tenemos un fluido que esta rotando como un cuerpo sóldo con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}_0$ alrededor de un eje fijo entonces la velocidad viene dada por

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}. \tag{3.40}$$

Calculando el rotor de la velocidad se obtiene,

$$\omega = 2\Omega_0, \tag{3.41}$$

es decir que la vorticidad es el doble de la velocidad angular para un fluido rotando como cuerpo sólido.

Si hacemos la integral de superficie,

$$\int_S \omega \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}l \tag{3.42}$$

$$\omega_n \delta S = u_c l \tag{3.43}$$

$$\omega_n \pi r_0^2 = u_c 2\pi r_0 \tag{3.44}$$

$$\omega_n = 2u_c/r_0 \tag{3.45}$$

de nuevo hemos obtenido que la vorticidad es el doble de la velocidad angular. Pero se debe tener cuidado con este ejemplo, la vorticidad es un concepto mas general que no requiere de un eje fijo para medir rotación y por ejemplo en un flujo con cortante, shear, existe vorticidad no nula.

La vorticidad absoluta de un objeto sobre la tierra es

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{3.46}$$

aplicando el rotor

$$\nabla \times \mathbf{u}_I = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{3.47}$$

por lo que la vorticidad absoluta medida en un sistema de coordenadas viene dada por la vorticidad relativa (medida en el sistema fijo en la Tierra) mas el doble de la velocidad de rotación de la Tierra,

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega} \tag{3.48}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad de rotación de la Tierra.

3.8 Teorema de circulación de Kelvin

Bajo ciertas hipótesis, el teorema de Kelvin establece que la circulación de un elemento de fluido es conservada. Vamos a pedir que el fluido sea no viscoso, es decir que todas las fuerzas que actuan sobre el fluido sean conservativas y que el fluido sea barotrópico, es decir un fluido cuya presión solo dependa de la densidad (independiente de la temperatura). Para hacer la derivación comenzaremos por considerar un fluido general sin restricciones y veamos como cambia temporalmente la circulación,

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_\Gamma D_t \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \oint_\Gamma \mathbf{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{3.49}$$

donde Γ es un circuito material que se mueve con las partículas que estan en él. Esto significa que la variación temporal de este circuito nos dará la velocidad de las partículas que estan ubicadas en él,

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathbf{l}) = \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathrm{d}|\mathbf{u}|^2 \tag{3.50}$$

Dado que es un circuito cerrado la integral de un diferencial exacto es 0, por lo que el segundo término en (3.49), correspondiente a las variaciones temporales en el circuito no contribuye a

los cambios de la circulación. La ecuación de conservación del momento en forma general en un sistema inercial, viene dada por

$$D_t \mathbf{u}_I = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}^* + \frac{\mathbf{F}_r}{\rho}. \tag{3.51}$$

Reemplazando (3.51) en (3.49) y teniendo en cuenta que la aceleración de la gravedad puede ser escrita como el gradiente de un potencial resulta

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \oint_\Gamma \left(-\frac{\nabla p}{\rho}\right) \mathrm{d}\mathbf{l} + \oint_\Gamma \frac{\mathbf{F}_r}{\rho} \cdot \mathrm{d}l. \tag{3.52}$$

Entonces tenemos dos términos que contribuyen a la generación de circulación en (3.52), por un lado el gradiente de presión $-\oint \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ y el de las fuerzas no-conservativas.

Como ejemplo regional de la conservación de la circulación se pueden notar los vórtices que se desprenden de las puntas del río Paraná, estos vórtices son generados por la capa límite cerca de la costa pero una vez que se desprende son entidades que conservan su vorticidad y pueden propagarse por el flujo del río por un largo tiempo. En el caso de la generación claramente allí la fricción de la costa hace de fuente de vorticidad. En general en la capa límite hay generación de vórtices, otros ejemplos son el flujo detrás de los objetos, las alas de un avión, el avión en el despegue (y luego durante su vuelo) y el flujo sobre montañas, en todos los casos se genera una "wake" (estela) detrás del obstáculo.

3.9 Generalización del teorema de circulación de Kelvin

En general la conservación de la circulación obtenida en el teorema de Kelvin puede ser extendida a una subclase de los fluidos no-barotrópicos si se conserva la entropía (temperatura potencial). Si la viscocidad es despreciable el cambio en la circulación viene dado por

$$D_t C = -\oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{3.53}$$

En general el término de la derecha es distinto de 0 excepto que se elija caminos especiales donde la integral se anula. Supongamos que la densidad del fluido puede ser escrita en la forma

$$\rho = \rho(p, \theta) \tag{3.54}$$

luego si elegimos un circuito isentrópico, i.e. donde θ se mantiene constante para un tiempo fijo, luego como la θ se conserva se mantendrá constante a lo largo del circuito. Luego en estos circuitos las densidades son solo funciones de p por lo tanto vale que

$$D_t C = 0 \tag{3.55}$$

En este caso la circulación se conserva a lo largo del movimiento.

3.10 Conservación de la vorticidad potencial en aguas poco profundas

Las ecuaciones de momento en un plano que rota como $f/2$ en aguas poco profundas son

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - fv = -g\partial_x \eta \tag{3.56}$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + fu = -g\partial_y \eta \tag{3.57}$$

Reescribiendo el operador derivada material como

$$\mathrm{D}_t u = \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - v(\partial_x v - \partial_y u) \tag{3.58}$$

Teniendo en cuenta de análisis vectorial que

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 2(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u}) \tag{3.59}$$

luego se deduce que

$$(\mathbf{u}\times\nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u}) \tag{3.60}$$

utilizando esta expresión para reescribir el operador derivada material se tiene que

$$\mathrm{D}_t\mathbf{u} = \partial_t\mathbf{u} + (\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) \tag{3.61}$$

Entonces reescribiendo la ecuación (3.56) y (3.57)

$$\partial_t u - (f+\zeta)v = -\partial_x[g\eta + \frac{1}{2}(u^2+v^2)] \tag{3.62}$$

$$\partial_t v + (f+\zeta)u = -\partial_y[g\eta + \frac{1}{2}(u^2+v^2)] \tag{3.63}$$

donde $B = g\eta + \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ es la función de Bernoulli.

Si aplicamos $\partial_x(3.63) - \partial_y(3.62)$ y considerando que $\zeta = \partial_X v - \partial_y u$ es la componente vertical de la vorticidad, se obtiene que

$$\partial_t(f+\zeta) + u\partial_x(f+\zeta) + v\partial_y(f+\zeta) + (f+\zeta)(\partial_x u + \partial_y v) = 0 \tag{3.64}$$

donde se uso que $\partial_t f = 0$. Dado que $D_t = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$,

$$D_t(f+\zeta) + (f+\zeta)\delta = 0 \tag{3.65}$$

La divergencia δ puede ser relacionada a las variaciones de profundidad a través de la ecuación de conservación de la masa,

$$\partial_t\eta + \partial_x[(H+\eta)u] + \partial_y[(H+\eta)v] = 0 \tag{3.66}$$

reescribiendo la ecuación se obtiene que

$$\partial_t\eta + u\partial_x(H+\eta) + v\partial_y(H+\eta) + (H+\eta)\delta = 0 \tag{3.67}$$

$$D_t\eta + (H+\eta)\delta = 0 \tag{3.68}$$

eliminando la divergencia entre las dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{D_t(\zeta+f)}{\zeta+f} - \frac{D_t\eta}{H+\eta} = 0 \tag{3.69}$$

representando la derivada material de la cantidad,

$$D_t\left(\frac{f+\zeta}{H+\eta}\right)=0 \tag{3.70}$$

esto es una ecuación de conservación de la cantidad denominada vorticidad potencial de aguas poco profundas $Q_{sw}=\frac{f+\zeta}{H+\eta}$, también conocida por vorticidad potencial de Rossby. Entonces si la parcela de fluido reduce la vorticidad absoluta f al moverse en latitud, hacia el ecuador sobre la tierra, la vorticidad relativa de la parcela sobre la tierra debe aumentar. Por otro lado la ecuación nos indica que también debida a los cambios de profundidad se pueden producir cambios en la vorticidad, esto sucede cuando tenemos flujo sobre montañas.

3.11 Ajuste bajo gravedad y rotación

En el anterior capítulo vimos como evoluciona un fluido de densidad constante $\rho=\rho_0$ que inicialmente se encuentra en reposo pero que contiene un salto, es decir la profundidad del fluido viene dada por $h=H-\eta_0\text{sgn}(x)$, con una membrana inicialmente en $x=0$ que es removida en $t=0$, por lo que el sistema busca un nuevo equilibrio. Este sistema era similar al experimento de Marsigli. En el ajuste bajo gravedad como vimos lo que sucede es que el sistema propaga ondas superficiales desde $x=0$ hacia $x\to\pm\infty$ hasta llegar a un nuevo equilibrio donde la energía potencial esta equidistribuida, es decir la altura final es $h(x)=H$. Supongamos nuevamente este problema, pero si el mismo fluido se encuentra en un sistema rotando con una velocidad angular $f/2$. En este caso la escala de tiempo del ajuste se da en la escala del período de rotación y el nuevo estado de equilibrio que se obtendrá no es el reposo. Este problema fue abordado por Rossby en 1938-1940. Encontró que el estado final del sistema depende del estado inicial, los dos estados estan ligados a través de una cantidad qeu se conserva que es la denominada perturbación de vorticidad potencial.

Asumamos que es válida la aproximación de aguas pocos profundas, entonces las ecuaciones que gobernarán la evolución del fluido son

$$\partial_t u - fv = -g\partial_x\eta \tag{3.71}$$

$$\partial_t v + fu = -g\partial_y\eta \tag{3.72}$$

$$\partial_t\eta + H(\partial_x u+\partial_y v)=0 \tag{3.73}$$

donde hemos asumido que las velocidades ocasionadas por el levantamiento de la membrana son pequeñas y la altura inicial $\eta_0\ll H$, de tal manera que hemos linealizado las ecuaciones. Vamos a expresar las ecuaciones de momento en función de la divergencia $\partial_x(3.71)+\partial_y(3.72)$, y de la vorticidad $\partial_x(3.72)-\partial_y(3.71)$ y reescribiendo la ecuación de continuidad (3.73) en función de estas variables resultando

$$\partial_t\zeta + f\delta = 0 \tag{3.74}$$

$$\partial_t\delta - f\zeta = -g\nabla^2\eta \tag{3.75}$$

$$\partial_t\eta + H\delta = 0 \tag{3.76}$$

Eliminando la divergencia de las ecuaciones, derivando con respecto al tiempo (3.74) y eliminando $\partial_t \delta$ usando (3.75) se obtiene

$$\partial_{tt}\eta - gH\nabla^2\eta + fH\zeta = 0 \tag{3.77}$$

Eliminando δ de (3.74) y (3.76) se tiene

$$\partial_t \zeta - \frac{f}{H}\partial_t \eta = 0 \tag{3.78}$$

Luego de estas dos ecuaciones eliminamos ζ obteniéndose una sola ecuación diferencial,

$$\partial_{ttt}\eta - c^2\partial_H^2\partial_t\eta + f^2\partial_t\eta = 0 \tag{3.79}$$

En el caso que integremos en t esta ecuación nos aparece un término de forzado constante temporalmente. Esta es una ecuación del tipo de Klein-Gordon equivalente a la que aparece en mecánica cuántica. La ecuación (3.78) nos establece la conservación de una cantidad

$$\partial_t \left(\frac{\zeta}{H} - \frac{f}{H^2}\eta \right) = 0 \tag{3.80}$$

si la comparamos con la vorticidad potencial de aguas poco profundas, $Q_{sw} = \frac{f+\zeta}{H+\eta}$, se puede notar que esta es la perturbación, asumiendo $\zeta \ll f$ and $\eta \ll H$, es decir:

$$Q'_{sw} = \frac{\zeta}{H} - \frac{f}{H^2}\eta \approx Q_{sw} - Q^0_{sw} = \frac{f+\zeta}{H+\eta} - \frac{f}{H} \tag{3.81}$$

Entonces se obtiene que

$$\partial_t Q'_{sw} = 0 \tag{3.82}$$

la perturbación de vorticidad potencial se mantiene constante en el tiempo, es decir dada una condición inicial con una dada Q'_{sw} el estado final del sistema debe tener la misma vorticidad potencial, aunque por supuesto pueden existir intercambios entre los términos de ζ y η tal que se mantenga constante el Q'_{sw}. En nuestro problema lo que tenemos es inicialmente una Q' a la cual solo contribuye η ya que al estar en reposo se tiene $\zeta(0) = 0$ en el estado final esperamos que parcial o totalmente la energía potencial se transforme en energía cinética. Para el caso de ajuste bajo gravedad en un sistema inercial es claro que toda la energía potencial se deberia transformar en energía cinética, sin embargo en un sistema rotante, existen estados de equilibrio geostrófico donde el fluido tiene energía potencial acumulada y que no es posible de extraer a través del ajuste. En otras palabras solo parte de la energía potencial es transformada en energía cinética,

$$Q'_{sw}(0) = Q'_{sw}(t) \tag{3.83}$$

Luego expandiendo se tiene que

$$\frac{f\eta(0)}{H^2} = \frac{\zeta(t)}{H} - \frac{f\eta(t)}{H^2} \tag{3.84}$$

luego se tiene que

$$\zeta(t) = \frac{f\eta(t)}{H} - \frac{f\eta(0)}{H^2} \tag{3.85}$$

reemplazando el valor de la vorticidad en (3.79) se obtiene

$$\partial_{tt}\eta - c^2\nabla^2\eta + f^2\eta = f^2\eta(x, y, t = 0). \tag{3.86}$$

La solución estática del problema es el balance geostrófico entre la aceleración de Coriolis y el gradiente de presión

$$-fv = -g\partial_x\eta, \tag{3.87}$$

$$fu = -g\partial_y\eta, \tag{3.88}$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0. \tag{3.89}$$

Lamentablemente como ya hemos visto este es un sistema de ecuaciones degenerado ya que la ecuación de continuidad se puede derivar a través de una combinación lineal de las dos primeras ecuaciones. Sin embargo ya hemos obtenido un resultado relevante, la perturbación de la vorticidad potencial se mantiene constante, por lo que podríamos utilizar esta información para definir de todos los posibles estados finales el que corresponde.

Del balance geostrófico se obtiene la solución estática,

$$f\zeta(t) = -g\nabla^2\eta(t) \tag{3.90}$$

Reemplazando la vorticidad de (3.85),

$$-\frac{g}{fH}\nabla^2\eta(t) - \frac{f}{H^2}\eta(t) = -\frac{f}{H^2}\eta_0 \tag{3.91}$$

reacomodando las constantes de la ecuación se obtiene que

$$c^2\nabla^2\eta(t) + f^2\eta(t) = -f^2\eta_0 sgn(x) \tag{3.92}$$

La solución steady-state entonces viene dada por

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \begin{cases} -1 + e^{-x/a}, & x > 0 \\ 1 - e^{x/a}, & x < 0 \end{cases} \tag{3.93}$$

donde $a = c/f = \frac{(gH)^{1/2}}{f}$ es el radio de deformación de Rossby.

Este ejemplo tiene algunas similitudes con la circulación general de la atmósfera en la cual se establecen dos jets troposféricos en medias latitudes y el campo de geopotencial estaría definido por el gradiente latitudinal de temperatura entre el ecuador y los polos. El ejemplo es también aplicable al océano. Entonces este ajuste en un sistema rotante nos deja algunas enseñanzas:

- La energía potencial es difícil de extraer en particular no toda la energía potencial esta disponible.
- La solución steady-state no es reposo, es el balance geostrófico.
- La solución es degenerada.
- La información necesaria para determinar el estado final se encuentra en la vorticidad potencial la cual es conservada.

El cambio de energía potencial por unidad de longitud viene dado por

$$\Delta E_p = 2\frac{1}{2}\rho g\eta_0^2 \int_0^\infty (1-(1-e^{-x/a})^2)\mathrm{d}x \tag{3.94}$$

$$= \frac{3}{2}\rho g\eta_0^2 a. \tag{3.95}$$

Mientras en el caso de la energía potencial el cambio que se produce es

$$\Delta E_k = 2\frac{1}{2}\rho g^2 H\eta_0^2 (fa)^2 \int_0^\infty e^{-2x/a}\mathrm{d}x \tag{3.96}$$

$$= \frac{1}{2}\rho g\eta_0^2 a. \tag{3.97}$$

se asume que el resto de la energía es llevada por el estado transitorio.

3.12 Adimensionalización de las ecuaciones de aguas poco profundas

Si tomamos las ecuaciones y asumimos que el término de aceleración de Coriolis es el dominante comparado a la aceleración inercial, entonces como se ha visto lo que obtenemos es el balance geostrófico. Sin embargo el balance geostrófico no nos da un marco útil para poder realizar predicciones ya que no es un sistema predictivo. Lo que debemos hacer es considerar el siguiente orden en la expansión lo cual conlleva a la denominada aproximación cuasigeostrófica, esencialmente es considerar "pequeñas perturbaciones" al balance geostrófico. En esta sección vamos a ver la derivación formal de la aproximación cuasigeostrófica, partiendo de las ecuaciones de aguas poco profundas adimensionalizadas y desarrollando una expansión asintótica en función del número de Rossby, que es el parámetro de pequeñez.

Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento en aguas poco profundas, la ecuación de conservación del momento horizontal es:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + f\times u = -g\nabla\eta \tag{3.98}$$

Si tomamos como distancia característica a L, como velocidad característica del movimiento a U, como tiempo característico a $T = L/U$ (de esta manera estamos restringiendo la escala del término de la aceleración a la escala del término de advección) y las variaciones de altura características de la superficie del fluido son $\mathcal{H}$, entonces la contribución de cada uno de los términos de (3.98), son

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \qquad fU \qquad\qquad g\frac{\mathcal{H}}{L} \tag{3.99}$$

Adimensionalizando (3.98), usamos como notación los sombreros para denotar a las variables adimensionalizadas, se tiene,

$$Ro\left(\partial_{\hat{t}}\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}\right) + \hat{f}\times\hat{\mathbf{u}} = -\frac{g\mathcal{H}Ro}{U^2}\hat{\nabla}\hat{\eta} \tag{3.100}$$

donde $Ro = \frac{U^2}{L}(fU)^{-1} = \frac{U}{fL}$, es el número de Rossby el cual es la razón de la aceleración sobre la aceleración de Coriolis, por lo que para un número de Rossby $Ro \ll 1$ lo que estamos

diciendo es que la aceleración de Coriolis es dominante y debe ser considerada en las ecuaciones conllevando a flujos cuasigeostróficos. Mientras si el $Ro \gg 1$ los efectos de Coriolis pueden ser despreciados.

La ecuación de conservación de la masa es

$$\partial_t \eta + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta + (H + \eta) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.101}$$

Adimensionalizando esta ecuación

$$\frac{\mathcal{H}}{H} \left(\partial_{\hat{t}} \hat{\eta} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\eta} \right) + \left(1 + \frac{\mathcal{H}}{H} \hat{\eta} \right) \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.102}$$

Una vez que tenemos las ecuaciones adimensionalizadas de lo unico que dependen es de los parámetros lo cual es muy útil para experimentos de laboratorio o para simulaciones en los cuales se quiere ver el número mínimo de parámetros libres de los que depende un problema específico. Por otro lado podemos hacer es una expansión asintótica en función de algun parámetro de pequeñez, para ver cuales son los regímenes dominantes.

Si asumimos que $Ro \ll 1$, es decir la aceleración de Coriolis es dominante, y proponemos una expansión asintótica de las variables,

$$\hat{u} = \hat{u}_0 + Ro \hat{u}_1 + \cdots \tag{3.103}$$

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_0 + Ro \hat{\eta}_1 + \cdots \tag{3.104}$$

La ecuación de movimiento orden 0 en Ro es

$$\hat{f}_0 \times \hat{\mathbf{u}}_0 = \frac{g \mathcal{H} Ro}{U^2} \hat{\nabla} \hat{\eta}_0 \tag{3.105}$$

Para que esta ecuación sea asintóticamente consistente se tiene que

$$\mathcal{H} = \frac{U^2}{gRo} = H Ro \frac{L^2}{L_d^2} \tag{3.106}$$

donde $L_d = \sqrt{gH}/f$ es el radio de deformación. Entonces la ecuación de movimiento de orden 0 resultante es

$$\hat{f}_0 \times \hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\nabla} \hat{\eta}_0 \tag{3.107}$$

Entonces lo que naturalmente tenemos en (3.107) que representa el orden $\mathfrak{o}(Ro^0)$ de la ecuación de movimiento, es un equilibrio entre el término de Coriolis y la fuerza de presión, i.e. balance geostrófico. De otra forma, para flujos de gran escala y velocidades relativamente menores, el número de Rossby es pequeño (mucho menor que uno) y esto conlleva a un balance geostrófico.

Para la ecuación de continuidad asumimos que $L_d \approx L$ de esta forma, la ecuación de continuidad de orden 0 es

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = 0 \tag{3.108}$$

Sin embargo esta ecuación ya esta implícita en (3.107), por lo que el sistema es degenerado. Tampoco puede ser usado como un sistema predictivo ya que (3.107) solo nos da una restricción pero no nos da la evolución de los campos. Para tener un sistema predictivo tenemos que ir al

primer orden en Ro las variables son definidas por $\hat{u} = \hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1$ y en ese caso las ecuaciones que resultan son:

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\mathbf{f}}_0 \times \hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\beta}\hat{y}\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}_0 = -\hat{\nabla}\hat{\eta}_1, \tag{3.109}$$

donde las dependencias latitudinales del parámetro adimensionalizado de Coriolis son $\hat{f} = \hat{f}_0 + Ro\hat{\beta}\hat{y}$. La ecuación de continuidad en primer orden resulta de (3.101)

$$\frac{L^2}{L_d^2}\left(\partial_{\hat{t}}\hat{\eta}_0 + \hat{\mathbf{u}_0} \cdot \hat{\nabla}\hat{\eta}_0 + \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}_0}\hat{\eta}_1\right) + \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}_1} = 0 \tag{3.110}$$

Expandiendo en componentes se tiene que

$$\partial_{\hat{t}}\hat{u}_0 + \hat{u}_0\partial_{\hat{x}}\hat{u}_0 + \hat{v}_0\partial_{\hat{y}}\hat{u}_0 - \hat{f}_0\hat{v}_1 - \hat{\beta}\hat{y}\hat{v}_0 = -\partial_{\hat{x}}\hat{\eta}_1 \tag{3.111}$$

$$\partial_{\hat{t}}\hat{v}_0 + \hat{u}_0\partial_{\hat{x}}\hat{v}_0 + \hat{v}_0\partial_{\hat{y}}\hat{v}_0 + \hat{f}_0\hat{u}_1 + \hat{\beta}\hat{y}\hat{u}_0 = -\partial_{\hat{y}}\hat{\eta}_1 \tag{3.112}$$

Tomando las derivadas cruzadas y restando se obtiene la ecuación para la vorticidad

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\zeta}_0 + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\nabla})(\hat{\zeta}_0 + \hat{\beta}\hat{y}) = -\hat{f}_0\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 \tag{3.113}$$

Eliminando el término de la divergencia de (3.110) se obtiene

$$\partial_{\hat{t}}\hat{\zeta}_0 + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\nabla})(\hat{\zeta}_0 + \hat{\beta}\hat{y}) = -\hat{f}_0\frac{L^2}{L_d^2}\left(\partial_{\hat{t}}\hat{\eta}_0 + \hat{\mathbf{u}_0} \cdot \hat{\nabla}\hat{\eta}_0\right) \tag{3.114}$$

Reacomodando términos resulta

$$\left(\partial_{\hat{t}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\nabla}\right)(\hat{\zeta}_0 + \hat{\beta}\hat{y} - \hat{f}_0\frac{L^2}{L_d^2}\hat{\eta}_0) = 0 \tag{3.115}$$

Para que quede una ecuación diferencial cerrada se puede reescribir todo en función de la función corriente $\hat{\phi}_0 = \hat{\eta}_0/\hat{f}_0$, para la cual valen las relaciones

$$\hat{u}_0 = -\partial_{\hat{y}}\hat{\psi}_0, \qquad \hat{v}_0 = -\partial_{\hat{x}}\hat{\psi}_0, \qquad \hat{\zeta}_0 = \hat{\nabla}^2\hat{\psi}_0. \tag{3.116}$$

Reemplazando en (3.115),

$$\left(\partial_{\hat{t}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\nabla}\right)\left(\hat{\nabla}^2\hat{\psi}_0 + \hat{\beta}\hat{y} - \hat{f}_0^2\frac{L^2}{L_d^2}\hat{\psi}_0\right) = 0 \tag{3.117}$$

Volviendo a cantidades dimensionales se tiene que

$$(\partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\left(\nabla^2\psi_0 + \beta y - \frac{1}{L_d^2}\psi_0\right) = 0 \tag{3.118}$$

donde la cantidad conservada advectivamente es la vorticidad potencial quasi-geostrófica para aguas poco profundas

$$q = \nabla^2\psi_0 + \beta y - \frac{1}{L_d^2}\psi_0 = \zeta + \beta y - \frac{g}{f_0 L_d^2}\eta_0 \tag{3.119}$$

3.13 Ondas de gravedad inerciales

Supongamos un fluido incomprensible continuamente estratificado en un plano que rota con velocidad f/2 y que conserva la entropía. Las ecuaciones de movimiento son similares a las ondas de gravedad pero se deben incluir los términos de Coriolis,

$$\partial_t u_1 - f v_1 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x p_1$$

$$\partial_t v_1 + f u_1 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_y p_1$$

$$\partial_t w_1 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z p_1 + \frac{\theta_1}{\theta_0} g$$

$$\partial_x u_1 + \partial_y v_1 + \partial_z w_1 = 0$$

$$\partial_t \frac{\theta_1}{\theta_0} + \frac{N_0^2}{g} w_1 = 0$$

Se procede a eliminar variables y tratar de obtener una ecuación para w_1. Comencemos por eliminar $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ usando (3.13) y derivada parcial en t de (3.13),

$$\partial_{tt} w_1 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_{zt} p_1 - N_0^2 w_1$$

A (3.13) y (3.13) las reescribimos en función de la vorticidad $\zeta_1 = \partial_x v_1 - \partial_y u_1$ y la divergencia $\delta_1 = \partial_x u_1 + \partial_y v_1$:

$$\partial_t \delta_1 - f\zeta_1 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla_H^2 p_1$$

$$\partial_t \zeta_1 + f\delta_1 = 0$$

De la ecuación de continuidad se tiene que $\partial_z w_1 = -\delta$ entonces

$$-\partial_{tz} w_1 - f\zeta_1 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla_H^2 p_1$$

$$\partial_t \zeta_1 + f\partial_z w_1 = 0$$

Eliminemos ζ_1 de ambas ecuaciones y por conveniencia derivo por z,

$$-\partial_{tzz} w_1 + f^2 \partial_{zz} w_1 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_{tz}\nabla_H^2 p_1$$

Aplicando ∇_H^2 a (3.13)

$$\left(\partial_{tt} + N_0^2\right) \nabla_H^2 w_1 = -\frac{1}{\rho_0} \partial_{zt} \nabla_H^2 p_1$$

Ahora si podemos eliminar el término de la presión

$$-\partial_{ttzz} w_1 + f^2 \partial_{zz} w_1 = \left(\partial_{tt} + N_0^2\right) \nabla_H^2 w_1$$

Reescribiendo obtenemos:

$$\partial_{tt} \nabla^2 w_1 - f^2 \partial_{zz} w_1 + N_0^2 \nabla_H^2 w_1 = 0$$

Proponemos una solución ondulatoria tal que

$$w_1 = \hat{w}_1 \exp[i(\omega t - kx - ly - mz)]$$

3.14 Ecuación de evolución de la vorticidad

Dejamos la aproximación de aguas poco profundas y consideramos el caso general. Hasta el momento hemos visto la conservación de la circulación que es una cantidad macroscópica y como esta puede ser extendida a una cantidad microscópica en el caso de fluidos bajo la aproximación de aguas poco profundas. Veamos ahora la derivación general de la ecuación para la vorticidad en un sistema de referencia rotante.

Partiendo de la conservación del momento en un sistema rotante,

$$D_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\hat{k} + \frac{\mathbf{F}_r}{\rho} \tag{3.120}$$

Como hicimos en el caso del fluido en aguas poco profundas reescribimos al operador derivada material por (3.61) y expresando a la aceleración de la gravedad como un geopotencial $-g\hat{k} = \nabla\Phi$, entonces

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla(\Phi - |\mathbf{u}|^2/2) + \frac{\mathbf{F}_r}{\rho} \tag{3.121}$$

Aplicando el operador $\nabla\times$ a la ecuación se obtiene

$$\partial_t \zeta + \nabla \times [(\zeta + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{u}] = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_r}{\rho}\right) \tag{3.122}$$

donde hemos usado que

$$\nabla \times \frac{\nabla}{\rho} = \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \cancel{\nabla \times \nabla p} = -\frac{1}{\rho^2} \nabla\rho \times \nabla p$$

Ahora definiendo a la vorticidad absoluta por $\boldsymbol{\zeta}_a = \boldsymbol{\zeta} + 2\boldsymbol{\Omega}$ y expandiendo el doble producto vectorial

$$\nabla \times (\zeta_a \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta}_a - \cancel{\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}_a \mathbf{u}} - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\zeta}_a \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Usando en (3.122) y notando que como $\mathbf{\Omega}$ es constante, $\partial_t \boldsymbol{\zeta} = \partial_t \boldsymbol{\zeta}_a$

$$\mathrm{D}_t \boldsymbol{\zeta}_a - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\zeta}_a \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_r}{\rho}\right) \tag{3.123}$$

Si se compara con la circulación, la vorticidad absoluta tiene dos términos de generación extras. El vortex-tube streching altera la vorticidad paralela al filamento por convergencia de filamentos. El vortex tilting por la variación a lo largo del filamento de la componente perpendicular al filamento.

Si usamos conservación de la masa

$$\mathrm{D}_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathrm{D}_t \boldsymbol{\zeta}_a - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\zeta}_a \frac{\mathrm{D}_t \rho}{\rho} = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_r}{\rho}\right) \tag{3.124}$$

Reagrupando términos

$$\mathrm{D}_t \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho}\right) - (\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_r}{\rho}\right) \tag{3.125}$$

Si consideramos un fluido barotrópico $p(\rho)$ y con fricción despreciable $\mathbf{F}_r = 0$, en el cual conocemos que se satisface el teorema de Kelvin de conservación de la circulacion, vale que

$$\mathrm{D}_t \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho}\right) = (\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

esta ecuación es equivalente a la de las lineas materiales que vale

$$\mathrm{D}_t \left(\delta\boldsymbol{\xi}\right) = (\delta\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

3.15 Conservación de la vorticidad potencial

Habiamos visto que el teorema de circulación de Kelvin se podía generalizar para el caso de flujos isentrópicos en el cual la presión depende de ρ y θ. ¿Podremos extender este concepto al caso microscópico?. Los resultados microscópicos fueron obtenidos por Rossby y generalizados por Ertel obteniendo lo que es conocido por el teorema de conservación de la vorticidad potencial.

Si consideramos la ecuación de vorticidad en el caso que la viscocidad y la fricción son despreciables se tiene que

$$\mathrm{D}_t \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho}\right) - (\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3}$$

Si multiplicamos por el gradiente de la temperatura potencial,

$$\mathrm{D}_t \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho}\right) \cdot \nabla\theta - (\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \nabla \cdot \theta \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3}$$

Pensando $p = p(\rho, \theta)$, entonces el gradiente de presión lo podemos expresar por

$$\nabla p = \partial_\theta p \nabla\theta + \partial_\rho p \nabla\rho$$

Entonces el término de generación de vorticidad por el efecto baroclínico se deriva

$$\nabla\theta \cdot \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3} = \nabla\theta \cdot (\partial_\rho p \cancel{\nabla\rho \times \nabla\rho} + \partial_\theta p \nabla\theta \times \nabla\rho)$$

$$\nabla\theta \cdot (\nabla\theta \times \nabla\rho) = 0$$

Entonces hemos visto como en superficies isentrópicas no hay producción de vorticidad por el efecto baroclínico, en forma similar a lo que se obtuvo macroscopicamente con el teorema generalizado de Kelvin.

Reescribamos ahora la cantidad de la derecha introduciendo adentro de la derivada material el gradiente de temperatura potencial,

$$\mathrm{D}_t \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla\theta \right) - \frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \mathrm{D}_t(\nabla\theta) - (\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \nabla\theta = 0$$

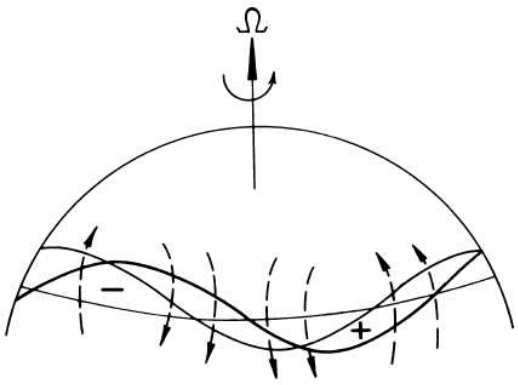
3.16 Ondas de Rossby o planetarias

Las ondas de Rossby son ondas de gran escala, planetaria, que se producen por la variación del parámetro de Coriolis con la latitud. En el caso de una atmosfera barotrópica, si los movimientos conservan la vorticidad absoluta. Entonces, las variaciones de f producirán variaciones de ζ,

$$(\zeta + f)(t_1) = f(t_0)$$

donde asumimos $\zeta(t_0) = 0$, expresando en primer orden las variaciones de f,

$$f(t_0) - f(t_1) = \zeta(t_1) = -\beta\delta y$$



Si pensamos en una onda alrededor de un circulo de latitud en el hemisferio norte, la parte del desplazamiento hacia el norte tendrá una perturbación de vorticidad negativa y positiva el desplazamiento hacia el sur. Estas perturbaciones de vorticidad producen un desplazamiento de la onda hacia el oeste en ambos casos. Es decir que las ondas o perturbaciones planetarias que se producen se van a propagar hacia el oeste por conservacion de la vorticidad absoluta. El gradiente meridional de la vorticidad absoluta es el mecanismo restaurador que dan origen a estas ondas.

Si $\delta y = a\sin[k(x-ct)]$ tenemos que $v = \mathrm{D}_t\delta y = -kca\cos[k(x-ct)]$ y además $\zeta = \partial_x v = k^2 ca\sin[k(x-ct)]$ considerando

$$\zeta(t_1) = -\beta\delta y \tag{3.126}$$

$$k^2 ca\sin[k(x-ct)] = -\beta a\sin[k(x-ct)] \tag{3.127}$$

$$\tag{3.128}$$

entonces la velocidad de fase de estas ondas es $c = -\frac{\beta}{k^2}$.