

# Electromagnetismo 2024

## Guía 8: Campos variables en el tiempo. Cuasiestacionario.

5 de junio de 2024

**Problema 1:** Se tiene un conductor semiinfinito para  $z > 0$  de conductividad  $\sigma$  y permeabilidad  $\mu$ . En la superficie  $z = 0$  se impone una condición de contorno que es uniforme pero depende del tiempo cuyo campo magnético es  $H_x(t, z = 0) = H_0 \cos \omega t$  bajo el régimen quasi-estático. Determine la solución del campo magnético  $H_x$  en  $z > 0$ .

**Problema 2:** Por un conductor cilíndrico macizo de radio  $a$  y conductividad  $\sigma$ , que puede considerarse de longitud infinita, circula una corriente alterna de tipo  $I = I_0 \cos(\omega t)$ . Bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcule:

- Los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el interior del conductor.
- La densidad de corriente  $\vec{J}$  y el promedio temporal de la potencia disipada por efecto Joule, por unidad de longitud.

**Problema 3:** Un condensador está formado por dos placas circulares de radio  $a$  separadas por una distancia  $h$  mucho menor que  $a$ . Entre las placas hay vacío. El condensador está conectado a un circuito por el que circula una corriente  $I = I_0 \sin(\omega t)$ . Calcule los campos eléctrico y magnético entre las placas del mismo, despreciando los efectos de borde. (Nota: En la aproximación cuasiestacionaria, al efectuar el desarrollo en potencias de  $\omega$ , la serie es convergente y puede relacionarse con las funciones de Bessel).

**Problema 4:** La solución de la ecuación de ondas en 3D para un punto fuente en espacio y en tiempo es un disturbio esférico de radio  $R = ct$ . En 1 y 2 dimensiones el disturbio tiene una estela aun cuando la fuente es un punto en el espacio y en el tiempo. Las soluciones para dimensiones menores pueden ser encontradas por la superposición de las dimensiones superfluas.

- Partiendo de la solución retardada de la ecuación de ondas 3D, muestre que la fuente  $f(\vec{x}', t') = \delta(x')\delta(y')\delta(t')$ , equivalente a una fuente puntual en  $t = 0$  y en el origen en un espacio de dos dimensiones, producirá la onda:

$$\Psi(x, y, t) = \frac{2c\Theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \quad (1)$$

donde  $\Theta$  es la función de Heaviside.

- Muestre que una fuente laminar, equivalente a una fuente puntual en el origen en un espacio de una dimensión produce una onda 1D de la forma:

$$\Psi(x, t) = 2\pi c\Theta(ct - |x|) \quad (2)$$

**Problema 5:** Encuentre la ecuación diferencial que satisface el potencial vector en un medio cuya corriente viene dada por la ley de Ohm ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) y la densidad de cargas es nula, asuma la aproximación de campos quasi-estáticos. En dicha aproximación es posible despreciar el término de la corriente de desplazamiento. La ecuación resultante es la ecuación de difusión homogénea:

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu\sigma \partial_t \vec{A} \quad (3)$$

en un medio conductor de conductividad eléctrica  $\sigma$ , en un problema sin condiciones de frontera, tiene una solución al problema de valor inicial de la forma:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int G(\vec{x} - \vec{x}', t) A(\vec{x}', 0) dV' \quad (4)$$

donde  $\vec{A}(\vec{x}', 0)$  es el vector potencial inicial y  $G$  es un núcleo apropiado.

- (a) Encuentre la solución al problema de valor inicial utilizando la transformada de Fourier 3D en el espacio para  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ . Muestre que la función de Green para  $t > 0$  tiene la representación de Fourier:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-k^2 t / \mu\sigma} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\vec{k} \quad (5)$$

- (b) Muestre que  $G(\vec{x} - \vec{x}', t)$  es la función de Green de difusión que satisface la ecuación:

$$\partial_t G - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t) \quad (6)$$

- (c) Muestre que si  $\sigma$  es uniforme en todo el espacio la función de Green es

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', 0) = \Theta(t) \left( \frac{\mu\sigma}{4\pi t} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{-\mu\sigma |\vec{x} - \vec{x}'|^2}{4t} \right) \quad (7)$$

- (d) Suponga que a tiempo  $t' = 0$ , el potencial vector inicial  $\vec{A}(\vec{x}', 0)$  es no nulo en una región localizada de extensión lineal  $d$  alrededor del origen. La dependencia temporal es observada en un punto  $P$  lejos del origen ( $r \gg d$ ). Muestre que hay tres regímenes de tiempo entre 0 y  $T_1$  entre  $T_1$  y  $T_2$  y para tiempos mayores a  $T_2$ . Muestre que para tiempos largos, el vector potencial es proporcional a la integral de volumen de  $\vec{A}(\vec{x}', 0)$  por  $t^{-3/2}$ .

**Problema 6:** Una onda plana transversa es incidente normalmente en vacío sobre una superficie plana perfectamente absorbente.

- (a) Usando la ley de conservación del momento lineal, muestre que la presión de radiación ejercida sobre la pantalla es igual a la energía del campo por unidad de volumen.
- (b) En el entorno de la tierra el flujo de energía electromagnética del sol es aproximadamente  $1.4 \text{ kW/m}^2$ . Si un velero interplanetario tuviera una vela de  $1 \text{ g/m}^2$ , ¿cuál sería la aceleración debida a la presión por la radiación solar? ¿Qué relación tiene la presión de radiación con la aceleración debida al viento solar?