Electromagnetismo 2024

Guía 5: Desarrollos multipolares y Medios materiales

8 de Mayo de 2024

Problema 1: Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las siguientes distribuciones de carga:

(a) dos cargas q: una en $(a, 0, 0)$ y la otra en $(0, a, 0)$ y dos cargas $-q$ en $(-a, 0, 0)$ y en $(0, -a, 0)$.

(b) dos cargas q: una en $(0, 0, a)$ y la otra en $(0, 0, -a)$ y una carga $-2q$ en el origen.

(c) un disco de radio a, centrado en el origen, sobre el plano x-y, con una carga q distribuida uniformemente.

Trate de obtener resultados, para los momentos no nulos, válidos para todo l pero en cada caso encuentre al menos los dos primeros conjuntos de momentos no nulos.

(i) Para la distribución de carga (b) escriba el desarrollo multipolar para el potencial. Manteniendo sólo el término de orden mas bajo en la expansión, dibuje el potencial en el plano x-y como función de la distancia al origen para distancias mayores que a.

(ii) Calcule directamente, a partir de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano x-y. Dibuje, como función de la distancia al origen, el potencial y compare con el resultado obtenido en el punto anterior.

(iii) Estudie la forma asintótica en los puntos anteriores para ver claramente el comportamiento a grandes distancias.

Problema 2: Una densidad localizada de carga $\rho(x, y, z)$ está ubicada en un campo electrostático externo descripto por un potencial $\Phi(x, y, z)$ que varía suavemente en la región donde ρ es distinta de cero.

A partir de primeros principios calcular la fuerza total actuante sobre la distribución de cargas como un desarrollo de momentos multipolares hasta el término cuadrupolar. Muestre que la fuerza es:

$$\vec{F} = q\vec{E}^{(0)}(0) + \{\nabla[\vec{p} \cdot \vec{E}^{(0)}(\vec{x})]\}_0 + \left\{ \nabla \left[\frac{1}{6} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}(\vec{x}) \right] \right\}_0 + \cdots \tag{1}$$

Compare ésta con la expansión de la energía de los momentos multipolares. ¿Cuál es la conexión entre éstas expresiones?

Problema 3: Un núcleo de momento cuadrupolar Q, que se encuentra en un campo eléctrico de simetría cilíndrica con un gradiente en la dirección del eje z en la posición ocupada por el núcleo.

(a) Demuestre que la energía de interacción cuadrupolar es:

$$W = -\frac{e}{4} Q(\partial_z E_z)_0 \tag{2}$$

donde $Q = Q_{33}/e$ (notación de Jackson)

(b) Las distribuciones de carga nuclear pueden aproximarse mediante una densidad de carga constante que ocupa un volumen esferoidal de semieje mayor a y semieje menor b. Calcule el momento cuadrupolar de dicho núcleo suponiendo que la carga total es Ze.

(c) Sabiendo que el Eu^{153}; $(Z = 63)$ tiene un momento cuadrupolar $Q = 2.5\ 10^{-24}\text{cm}^2$ y radio medio $R = \frac{a+b}{2} = 7\ 10^{-13}\text{cm}$ calcule la diferencia relativa entre los radios $\frac{a-b}{R}$.

Problema 4: Se tiene una distribución localizada de carga cuya densidad es:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{64\pi} r^2 \exp(-r) \sin^2\theta \tag{3}$$

(a) Obtenga un desarrollo en multipolos del potencial debido a ésta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Exprese el potencial a distancias grandes como un desarrollo finito en polinomios de Legendre.

(b) Determine explícitamente el potencial en un punto cualquiera del espacio y demuestre que cerca del origen del sistema se tiene:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{r^2}{120}\right) P_2(\cos\theta)\right] \tag{4}$$

(c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadrupolar $Q = 10^{-24}cm^2$ determine la magnitud de la energía de interacción suponiendo que la unidad de carga en $\rho(r)$ es la carga electrónica y que la unidad de longitud es el radio de Bohr para el hidrógeno, $a_0 = 0.529\ 10^{-8}$ cm. Exprese el resultado como una frecuencia dividiendo por la constante de Planck.

Medios materiales

Problema 5: Una cáscara cilíndrica circular muy larga, de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radios interior a y exterior b, es puesta en un campo eléctrico E_0 originalmente uniforme con su eje perpendicular al campo. El medio en el cual esta inmerso el cilindro tiene una constante dieléctrica $\epsilon/\epsilon_0 = 1$.

(a) Determine el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando efectos de borde.

(b) Dibuje las líneas de fuerza para un caso típico $b = 2a$.

(c) Discuta las formas límites de su solución, apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme y para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Problema 6: Una carga puntual q es colocada en el espacio libre a una distancia d de una esfera dieléctrica de radio $a < d$, y constante dieléctrica $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

(a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio, como un desarrollo de armónicos esféricos.

(b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera

(c) Verifique que en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \to \infty$, el resultado es el mismo que para una esfera conductora.

Problema 7: Sea una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme (paralelo al eje z y de módulo E_0). No hay cargas libres ni dentro ni fuera de la esfera. Calcule el potencial interior y exterior, los campos internos y externos a la esfera y la densidad de carga de polarización.