Electromagnetismo 2025

Guía 1: Electrostática I

31 de marzo de 2025

Problema 1: Utilice el teorema de Gauss y/o el teorema de Stokes para demostrar las siguientes proposiciones:

(a) Cualquier exceso de carga puesto sobre un conductor deberá estar sobre la superficie (se define condutor perfecto a una región de potencial constante).

(b) Un conductor hueco cerrado apantalla el interior de los campos debido a cargas exteriores, pero no apantalla al exterior de los campos debido a cargas colocadas en su interior.

(c) El campo eléctrico junto a la superficie de un conductor es normal a dicha superficie y su módulo vale σ/ϵ_0, siendo σ la densidad de carga sobre la superficie.

Problema 2: Dos láminas planas infinitas conductoras de espesor uniforme, t_1 y t_2, se colocan paralelamente una a la otra con sus caras adyacentes separadas por una distancia L. La primera lámina tiene una carga total por unidad de área (suma de las densidades superficiales de carga de cada lado) igual a q_1, y la segunda q_2.

(a) Use argumentos de simetría y la ley de Gauss para demostrar:

  (i) Las densidades superficiales de carga sobre las caras adyacentes son iguales y opuestas.
  (ii) Las densidades en las caras exteriores en ambas láminas son iguales.

(b) Obtenga las densidades y los campos para el caso en que $q_1 = -q_2 = Q$.

Problema 3: Usando la función delta de Dirac en las coordenadas indicadas exprese las siguientes distribuciones de carga, $\rho(\vec{x})$,

(a) En coordenadas esféricas:

  (i) Una carga Q distribuida uniformemente sobre una cáscara esférica de radio R.
  (ii) Una carga puntual Q en el punto de coordenadas cartesianas (x_o, y_o, z_o).
  (iii) Una carga puntual Q en el origen del sistema de coordenadas.
  (iv) Una carga Q distribuida uniformemente sobre un disco de espesor despreciable y radio R.

(b) En coordenadas cilíndricas:

  (i) Una carga Q distribuida uniformemente sobre un disco de espesor despreciable y radio R.
  (ii) Una carga λ por unidad de longitud distribuida sobre una superficie cilíndrica infinita de radio b.

Problema 4: Sea una superficie conductora esférica de radio a unida por un conductor fino a otra esfera conductora de radio b $(a > b)$. Suponiendo que las esferas están cargadas con carga Q y suficientemente alejadas como para despreciar la influencia de una sobre la otra, calcule:

(a) la carga sobre cada una de las esferas.

(b) el campo sobre la superficie de cada esfera

Problema 5: Pruebe el teorema de reciprocidad de Green: si ϕ es el potencial debido a una densidad volumétrica de carga ρ dentro de un volumen V y una densidad superficial de carga σ sobre la superficie conductora S que limita el volumen V, mientras ϕ' es el potencial debido a otra distribución ρ', σ', entonces:

$$\int_V \rho\, \phi'\, dV + \oint_S \sigma\, \phi'\, dS = \int_V \rho' \phi\, dV + \oint_S \sigma'\, \phi\, dS$$

Problema 6: Demuestre el teorema del valor medio: "El valor del potencial electrostático en cualquier punto es igual al valor medio del potencial sobre la superficie de cualquier esfera centrada en dicho punto para un espacio libre de cargas". Ayuda: Usar la/s identidad/es de Green.

Problema 7: Se tienen tres esferas de radio a con carga total Q, una conductora, otra que posee una densidad de carga uniforme en su volumen y otra con una densidad de carga con simetría esférica que varía como r^n ($n > -3$). Hágase uso del teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto en el interior como en el exterior de cada esfera. Representar gráficamente el comportamiento de los campos en función de r para cada esfera y en los casos en que $n = -2$ y $n = 2$ para la tercera esfera.

Problema 8: Calcular la energía necesaria para cargar con una carga Q una esfera conductora. Compare con la energía de una esfera con $\rho = \text{cte}$ y la misma carga total. Un modelo posible para una carga puntual es una esfera de radio $r \to 0$. Discutir el comportamiento de la energía.

Problema 9: Dos planos conductores infinitos paralelos conectados a tierra estan separados una distancia d. Use el teorema de Reciprocidad de Green para probar que si ponemos una carga puntual q entre los planos, la carga inducida en uno de ellos es $-q/d$ veces la distancia de la carga puntual al otro plano.

Problema 10: Muestre que la distribución de carga $\rho(\vec{x}) = -(\vec{p}\cdot\nabla)\delta(\vec{x})$ representa un dipolo elemental de momento $\vec{p}$ en el origen.

Problema 11: Determine el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por dos conductores paralelos de radios a_1 y a_2 con densidad de carga lineal λ con signos diferentes para las cargas sobre cada línea. Calcule el potencial y la familia de líneas equipotenciales. La separación entre los alambres es d ($\gg a_1$ y a_2). Muestre que la capacidad por unidad de longitud está dada aproximadamente por:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

donde a es igual a la media geométrica de ambos radios. Suponga que la densidad de carga es uniforme.

Problema Desafío

Problema C.1: Demuestre el teorema de Thompson: "Dado un cierto número de superficies conductoras fijas, la energía electrostática (en la región limitada por dichas superficies) cuando se distribuyen las cargas de forma tal que cada superficie sea equipotencial, es mínima con respecto a la energía de los campos que pudieran producirse con cualquier distribución ficticia de carga que mantenga constante la carga total sobre los conductores".