Capítulo 7

Campos variables en el tiempo

7.1 Ecuaciones de Maxwell

En el capítulo anterior estuvimos trabajando con un conjunto de ecuaciones que denominamos aproximación quasi-estática, las cuales en el vacio vienen expresadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \partial_t \vec{B} \tag{7.2}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{7.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.4}$$

Si aplicamos la divergencia a la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3),

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \tag{7.5}$$

dado que la divergencia del rotor de cualquier campo vectorial es nulo, se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{7.6}$$

El conjunto de ecuaciones lentamente variable en el tiempo no cumple con la ecuación de conservación de la carga general, sino que tendría como hipótesis que la ρ es independiente del tiempo, se mantiene constante.

Sin embargo para campos variables en el tiempo la corriente debería ser de la forma

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{7.7}$$

Esta inconsistencia de las ecuaciones del electromagnetismo fue notada por primera vez por Maxwell, quien propuso agregar un término extra para que las ecuaciones del electromagnetismo, luego llamadas de Maxwell, satisfagan la forma general de conservación de la carga. Lo que se plantea entonces es proponer un término extra en la ecuación del rotor del campo magnético, (7.3), que resulte en la ecuación (7.7). Pero de hecho el término extra, $\partial_t \rho$ lo podemos directamente asociar a (7.1),

$$\partial_t \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \partial_t \vec{E} \tag{7.8}$$

Entonces si agrego el término extra, $\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$, a (7.3) luego cuando se aplica la divergencia resulta en $\mu_0 \partial_t \rho$. Este término es denominado *corriente de desplazamiento de Maxwell*.

Es decir que el conjunto de ecuaciones completo del electromagnetismo en el vacio es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \tag{7.9}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \tag{7.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.11}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.12}$$

Estas son las denominadas ecuaciones de Maxwell y describen los campos electromagnéticos variables en el tiempo. Con los dos términos de variaciones temporales de los campos introducidos, se estan acoplando de manera simétrica el campo eléctrico y el magnético.

Si se examina las ecuaciones de Maxwell (7.9)–(7.15) se observa que ante la ausencia de términos fuentes, $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$, se tiene que las ecuaciones tienen *simetría dual* es decir son invariantes ante la transformación

$$\vec{E} \to c\vec{B}, \qquad \vec{B} \to -\vec{E}/c. \tag{7.13}$$

Esto significa que si tenemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son soluciones de las ecuaciones en la ausencia de fuentes entonces los campos dados por $\vec{E}' = -c\vec{B}$ y $\vec{B}' = \vec{E}/c$ son también soluciones. Claramente la simetría dual manifiesta una similaridad intrínseca en la naturaleza de los campos en el caso variable en el tiempo sin fuentes.

Por el contrario cuando las fuentes son no nulas, sucede lo que ya hemos analizado en el caso estático, existe una fuente de divergencias en el caso del campo eléctrico, pero no existe en el campo magnético debido a la ausencia de monopolos magnéticos. Por otro lado la presencia de densidades de corrientes afecta al rotor del campo manético. Esto termina dando las diferencias cualitativas ya obtenidas en el caso estático, el campo eléctrico posee líneas de campo entrante o salientes de una dada superficie cerrada (con carga neta) mientras el campo magnético tiene líneas de campo que se cierran sobre sí mismas.

7.2 Vector potencial

Las ecuaciones de Maxwell estan escritas en una forma donde las variables no son todas independientes entre sí, y las ecuaciones tampoco, tenemos 8 ecuaciones y 6 variables.

Para simplificar la resolución general de un problema electromagnético lo que se debe hacer es transformar las variables y el conjunto de ecuaciones a uno mas simple. Esto se lleva a cabo, de la misma manera que lo hicimos en electrostática y en magnetostática, a través de potenciales. Para el caso del vector potencial usamos de hecho la misma definición que en el caso estático.

Para reescribir el conjunto completo de ecuaciones en función de potenciales comencemos por la ecuación (7.11), la cual es satisfecha para cualquier potencial vector $\vec{A}$ definido por

$$\vec{B} = \nabla \times A. \tag{7.14}$$

Claramente no podemos definir directamente al campo eléctrico como el gradiente de un escalar, como hicimos en el caso estático ya que el rotor del campo eléctrico no es 0, pero reemplazando (7.14) en (7.15), se obtiene que

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0. \tag{7.15}$$

Luego podemos proponer un potencial escalar que sea definido por

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \Phi. \tag{7.16}$$

Dicho de otra manera, el campo eléctrico queda determinado si conocemos a Φ y $\vec{A}$ por

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi. \tag{7.17}$$

Las ecuaciones del potencial vector y escalar resultantes en el vacío son

$$\nabla^2 \Phi + \partial_t (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0 \tag{7.18}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}^2 \vec{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi \right) = -\mu_0 \vec{J} \tag{7.19}$$

Éstas ecuaciones están acopladas entre ellas, sin embargo tenemos la libertad de elegir los potenciales para simplificarlas y desacoplarlas, existen dos 'gauges' muy utilizados. El gauge de Coulomb y el de Lorenz. Ya hemos utilizado el denominado gauge de Coulomb para la derivación de los campos cuasi-estáticos, lo que se hace para "calibrar" las ecuaciones es elegir una restricción en los potenciales que simplifique las ecuaciones. Para el caso de las ecuaciones variables en el tiempo existen numerosos gauges (calibraciones) aunque en este curso solo veremos dos.

7.2.1 Gauge de Coulomb

En el caso del gauge de Coulomb se toma que el potencial vector debe satisfacer:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \tag{7.20}$$

En este caso usando esta restricción en (7.18) y (7.19)y el conjunto de ecuaciones resultantes son:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{7.21}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\partial_t\Phi \tag{7.22}$$

Los potenciales en (7.22) continuan acoplados, sin embargo en (7.21) solo es función del potencial escalar y vemos que tiene la forma familiar de la ecuación de Poisson. Por lo que, la solución a esta ecuación, (7.21), es el potencial de Coulomb instantáneo:

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V'. \tag{7.23}$$

Este potencial es equivalente al de electrostática, pero para la distribución de carga que existe en el momento t. Notar entonces que las variaciones temporales en la distribución de carga son inmediatamente capturadas por el potencial. Las causas tienen efectos inmediatos en todo el espacio. Esto no es inconsistente ya que son los campos los que van a tener las restricciones físicas, en particular que todo tipo de información viajará a una velocidad menor o igual a la de la luz. Esta información entonces se encuentra en la segunda ecuación (7.22) del gauge de Coulomb.

Para resolver (7.22) es conveniente escribir a la corriente en una componente irrotacional y una componente solenoidal,

$$\vec{J} = \vec{J_l} + \vec{J_t} \tag{7.24}$$

donde $\nabla\times\vec{J_l} = 0$, $\nabla\cdot\vec{J_l} = \nabla\cdot\vec{J}$ y por otro lado $\nabla\cdot\vec{J_t} = 0$, $\nabla\times\vec{J_t} = \nabla\times\vec{J}$. De las ecuaciones para $\vec{J_l}$, en forma equivalente al campo eléctrico estático, se deduce que el gradiente del campo viene dado por

$$\vec{J_l} = \frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{-\nabla\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V'. \tag{7.25}$$

Derivando con respecto al tiempo (7.23) y teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la carga se obtiene que

$$\partial_t\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{-\nabla\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}V' \tag{7.26}$$

resultando que

$$\frac{1}{c^2}\nabla\partial_t\Phi = \mu_0\vec{J_l}. \tag{7.27}$$

Mientras la ecuación resultante, partiendo de (7.22) para el vector potencial y eliminando (7.27) es:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A} = \mu_0\vec{J_t}. \tag{7.28}$$

Esta ecuacion tiene la forma característica de las ecuaciones de ondas no dispersivas en tres dimensiones, con un término fuente $\mu_0\vec{J_t}$. De esta manera al reescribir la densidad de corriente en componentes solenoidal ee irrotacional hemos logrado desacoplar la ecuación obteniendose una ecuación para el vector potencial.

7.2.2 Gauge de Lorenz

En el gauge de Lorenz, tomamos que el potencial vector satisface la condición

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi = 0. \tag{7.29}$$

Ejercicio 7.1: Demostrar que realmente se puede tomar esta condición como una consecuencia de la libertad que tenemos en la elección del potencial vector. Es decir, demostrar que eligiendo un $\vec{A}'$ que satisfaga (7.29) no cambia el campo magnético con respecto al obtenido por el $\vec{A}$ original.

Luego si imponemos la condición (7.29) a (7.18) y (7.19), las ecuaciones resultantes son:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{7.30}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{7.31}$$

éstas tienen la forma familiar de 4 ecuaciones de ondas en 3D independientes con términos de forzado, es decir hemos transformado la ecuaciones acopladas entre el campo eléctrico y el campo magnético variables en el tiempo, en 4 ecuaciones de ondas desacopladas con 4 términos de forzado. Estos términos de forzado deben satisfacer la restricción impuesta por la conservación de la carga $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$.

La velocidad de fase de las ondas, representadas en (7.30) y (7.31), es la velocidad de la luz, por otro lado queda establecido de las ecuaciones que las ondas electromagnéticas son no dispersivas en el vacio, dado que la frecuencia de las ondas depende linealmente del número de onda, o dicho de otro modo la velocidad de fase de las ondas es la misma para ondas de cualquier frecuencia. Entonces, las ondas electromagnéticas se pueden propagar largas distancias en el espacio vacio sin disminuir significativamente su amplitud. Las fuentes de las ondas son las densidades de corrientes o densidades de carga y sus variaciones temporales (y por supuesto los contornos en un problema limitado por una superficie cerrada).

7.3 Funciones de Green para la ecuación de ondas

Ahora que hemos encontrado la forma mas general y simétrica de expresar los potenciales del campo electromagnético, (7.30) y (7.31), es conveniente encontrar un método de resolución general. En electrostática vimos como el método de Green nos permite encontrar soluciones generales a las ecuaciones no-homogéneas a partir de conocer la solución de las ecuaciones a un punto fuente (mas las soluciones de las ecuaciones homogéneas). En esta sección generalizaremos el método de la función de Green para funciones variables en el tiempo.

En el gauge de Lorenz las ecuaciones resultantes tanto para Φ, (7.30), como para $\vec{A}$, (7.31), son la ecuaciones de ondas desacopladas. También en el caso del gauge de Coulomb se obtuvo para el potencial vector una ecuación de ondas. Veamos en general como se puede resolver la ecuación de ondas para una variable Ψ tal que

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Psi = -4\pi f(\vec{x}, t) \tag{7.32}$$

es decir tenemos una ecuación de ondas 3D, donde no hay dispersión y la velocidad de fase es c, con un término de forzado f.

Supondremos un problema abierto sin condiciones de contorno. En general las condiciones de contorno serían equivalentes a las del problema de Poisson, o la función o su derivada normal en la superficie.

En el caso en que tengamos simetría esférica la ecuación de ondas resultante es

$$\frac{1}{r}\partial^2_{rr}(r\Psi) - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\Psi = 0 \tag{7.33}$$

Asumiendo que la condición inicial es:

$$\Psi(r, t = 0) = \frac{F(r)}{r} \tag{7.34}$$

Debido a que no hay dispersión la onda conservará la forma inicial, las soluciones posible son

$$\Psi(r, t) = A\frac{F(r - ct)}{r} + B\frac{F(r + ct)}{r} \tag{7.35}$$

donde por (7.34) se tiene que $A + B = 1$.

La constante aun sin determinar, se determina usando la otra condición inicial necesaria (e.g. derivada temporal inicial). En particular, si también pedimos que la derivada de la función sea 0 inicialmente, $\partial_t\psi(\vec{x}, 0) = 0$, entonces $A = B = 1/2$. La amplitud en este caso se reparte en partes iguales.

Entonces la forma inicial que tenía Ψ en $t = 0$, de (7.35), se mantiene a lo largo del tiempo, la ecuación de ondas no dispersivas lo único que hace es mover la forma inicial, la condición inicial, con una velocidad $+c$ y con $-c$. De (7.35) vemos que el primer término de la solución se propaga con velocidad $+c$ mientras el segundo término se propaga con $-c$. Si inicialmente $F(r)$ tiene forma de un anillo gaussiano, $F(r) = A\,e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}$ parte de la solución se propagará hacia afuera mientras la otra se propagará hacia el origen.

Ejercicio 7.2: Dada la ecuación de onda en una dimensión en coordenadas cartesianas $\partial^2_{xx}\psi - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\psi = 0$ resuelva con separación de variables, proponga soluciones complejas y derive la solución general del problema para una condición inicial general.

7.3.1 Solución no homogénea

Para resolver la ecuación no homógenea utilizamos el método de la función de Green, la cual debe ser solución de la ecuación:

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \tag{7.36}$$

es decir que queremos ver como el operador de ondas evoluciona una fuente de forzado que esta localizada en $\vec{x} = \vec{x}'$ y $t = t'$. Esto es un pulso espacio-temporal que luego el operador de onda se encarga de propagarlo. Como condición de causalidad se tiene que $G = 0$ para $t < t'$.

Proponemos escribir a G como una integral de Fourier por definición es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{7.37}$$

Teniendo en cuenta que la función delta viene dada por

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega. \tag{7.38}$$

La ecuación resultante en el espacio de las frecuencias es:

$$\nabla^2 \hat{G}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{G}_\omega = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')e^{-i\omega t'} \tag{7.39}$$

Tenemos una ecuación que solo depende dee $\vec{x}$ en el espacio de las frequencias, notar que t' es fijo. Si asumimos simetría esférica (sin condiciones de contorno) el problema se simplifica a:

$$\frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R^2} (R\hat{G}_\omega) + k^2 G_\omega = -4\pi\delta(R) \tag{7.40}$$

donde $k = \omega/c$ y $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. La solución para $\vec{R} \neq 0$ es

$$\hat{G}_\omega = A_\pm \frac{\exp(\pm ikR)}{R} \tag{7.41}$$

Para encontrar las constantes $A_\pm$ integramos la ecuación (7.39) en un volumen que comprenda a $\vec{R} = 0$ (un esfera de radio ϵ):

$$\int [\nabla^2 \hat{G} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{G}] \mathrm{d}V = -4\pi \int \delta(\vec{x} - \vec{x}') \mathrm{d}V e^{-i\omega t'} \tag{7.42}$$

Teniendo en cuenta que G es continua el segundo término del LHS de (7.42) se anula si la integración es en un volumen infinitesimal, mientras el primero permanece, pero entonces esto es esencialmente lo que se tenía en electrostática:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{7.43}$$

Deducimos que las constantes $A_\pm = 1$. Es decir que $A_+ + A_- = 1$, pero aqui la derivada temporal selecciona una de las dos soluciones posibles.

La solución volviendo al espacio físico es

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega(t-t')} \mathrm{d}\omega. \tag{7.44}$$

Luego usando $k = \omega/c$ reescribimos a (7.44) como

$$G_{\pm}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[\pm R/c-(t-t')]}\mathrm{d}\omega \tag{7.45}$$

El cual es la definición de la función delta, por lo que queda

$$G_{\pm} = \frac{\delta(t'-t\pm R/c)}{R} \tag{7.46}$$

G_+ es la función de Green retardada. Un efecto observado en el punto $\vec{x}$ y en el tiempo t es causado por una fuente que esta a una distancia R y fue producido en un tiempo anterior. La información se propaga desde las fuentes en círculos concéntricos y luego esta información es recibida en el punto de observación. Dado que estamos con ondas no-dispersivas no hay ningun tipo de dispersión. Si la fuente fue una delta esta se conserva en el tiempo. No hay ensanchamiento-dispersión de los disturbios, los cuales siguen localizadas espacio-temporalmente. La función original se mueve por el espacio desde su punto espacio-temporal fuente hasta el punto de observación conservando su forma.

La solución particular, no homogénea, es:

$$\Psi_N(\vec{x},t) = \int\int G(\vec{x},t;\vec{x}',t')f(\vec{x}',t')\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \tag{7.47}$$

Para encontrar la solución general se debe agregar la solución homogénea:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int\int G_+ f\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \tag{7.48}$$

Reemplazando (**??**) en (**??**) y si evaluamos a la función δ en el tiempo, resulta en:

$$\Psi = \Psi_{in} + \int \frac{f|_{t'=t-R/c}}{R}\mathrm{d}V' \tag{7.49}$$

el tiempo $t' = t - R/c$ es lo que llamamos tiempo retardado.

Este tiempo retardado es el tiempo que requiere la "información" en propagarse desde la fuente hasta el punto de observación. Dicho de otro modo, cuando nosotros producimos un cambio en la fuente. Por ejemplo cambiamos la densidad de carga en una pequeña región, la información de este cambio llegará al punto de observación con un retardo que tiene que ver con la velocidad en la que se propaga la luz y la distancia entre los puntos fuente y observación. Un ejemplo mas concreto es cuando miramos las estrellas, la luz que vemos de las estrellas corresponde a algo que ocurrió cientos de miles o millones de años atrás, de hecho pueden existir estrellas que actualmente no existen como tales cuya luz que vemos ahora corresponde a antes de su destrucción.

La condición que debe satisfacer es:

$$\Psi = \Psi_{in} \qquad \text{para} \qquad t \to -\infty \tag{7.50}$$

es decir que la interpretamos como la condición inicial a tiempos remotos.

En el caso de la solución adelantada se tiene que

$$\Psi = \Psi_{out} + \int\int G_{-} f \,\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \tag{7.51}$$

$$\Psi = \Psi_{out} + \int \frac{f|_{t'=t+R/c}}{R} \,\mathrm{d}V' \tag{7.52}$$

La condición que debe satisfacer la solución adelantada es:

$$\Psi = \Psi_{out} \qquad \text{para} \qquad t \to \infty \tag{7.53}$$

Esta solución no es muy representativa fisicamente, tenemos especificada las condiciones finales del problema. Es como que tenemos los efectos pero no las causas, por lo cual en general se descarta por cuestiones físicas, aunque matemáticamente es una solución viable.

Ejercicio 7.3: Supongamos que tenemos una fuente lineal en z, tal que $f(\vec{x}, t) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t')$. Encontrar la forma de los potenciales en todo punto del espacio. Para resolver este problema se debe hacer uso de la solución 3D de una fuente puntual espacio-temporal, i.e. la función de Green, e integrarla para representar la superposición de fuentes puntuales ubicadas a lo largo del eje z.

Ejercicio 7.4: Una forma alternativa de encontrar la función de Green es representar a todas las variables en el espacio de Fourier.

Ejercicio 7.5: Expresar a la solución general del problema a traves de la función de Green en el caso de un forzado $f(\vec{x}, t)$ cuando existen condiciones de contorno.

7.4 Conservación de la energía

En general siempre las leyes de conservación están "escondidas" en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. Es decir que en las ecuaciones de Maxwell se encuentran estas rescricciones de conservación de la carga, el momento y la energía. Dicho de otro modo, la ecuación de la carga, de la energía, y el momento pueden ser deducidas de la ecuaciones sin utilizar información o "física" extra.

Ya hemos visto como esta codificada la ecuación de conservación de la carga en las ecuaciones de Maxwell. De hecho, como lo hiciera Maxwell, hemos deducido la forma final de las ecuaciones de Maxwell a partir de requerir la ecuación de conservación de la carga en la Sección 7.1. La ecuación de conservación de la carga es el paradigma de conservación, la variación (temporal) de la carga en un pequeño volumen solo puede deberse al ingreso o egreso de densidad de corriente a través de la superficie del pequeño volumen. Visto de una forma discreta y grosera, si en una habitación ayer teníamos tres cargas y hoy hay cuatro, no hay duda de que una carga entró desde afuera de la habitación, ya que no se puede crear espontaneamente.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell en un medio material lineal,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{7.54}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.55}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{E} = \vec{J} \tag{7.56}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.57}$$

Multiplico escalarmente (7.55) por $\vec{H}$ y (7.56) por $\vec{E}$, es decir se busca obtener derivadas temporales cuadráticas de los campos,

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} = 0 \tag{7.58}$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = 0 \tag{7.59}$$

Restando estas ecuaciones se obtiene

$$\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \tag{7.60}$$

Si se asume que $\vec{H}$ es proporcional a $\vec{B}$ y que $\vec{E}$ es proporcional a $\vec{D}$ se tiene

$$\frac{1}{2}\partial_t(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H} \cdot \nabla \times E = -\vec{E} \cdot \vec{J} \tag{7.61}$$

notando que $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, obtenemos la ecuación de conservación de la energía electromagnética

$$\partial_t u_{EM} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J} \cdot \vec{E}, \tag{7.62}$$

donde $u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right)$ es la densidad de energía electromagnética, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es la densidad de flujo de energía también conocida como el vector de Poynting.

Si tenemos a una carga que se mueve en un campo electromagnético el trabajo que se ejerce para moverla un $d\vec{l}$, utilizando la expresión de la fuerza de Lorenz viene dado por

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\mathrm{d}t, \tag{7.63}$$

donde $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{l}/\mathrm{d}t$ es la velocidad. Claramente el término de la fuerza del campo magnético es perpendicular al desplazamiento y por lo tanto no realiza trabajo. El trabajo hecho en un $\mathrm{d}t$ por el término del campo eléctrico se puede reexpresar en función de la densidad de corriente,

$$\delta W = \rho \mathrm{d}V \vec{E} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V\mathrm{d}t. \tag{7.64}$$

De lo que deducimos que el trabajo total realizado por unidad de tiempo es

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int \vec{E} \cdot \vec{J}\mathrm{d}V. \tag{7.65}$$

Notar entonces que el término $-\vec{J}\cdot\vec{E}$ que esta actuando como fuente o sumidero de la energía electromagnética, es el trabajo hecho sobre el campo para mover las cargas por unidad de tiempo y de volumen. Este término representa la conversión de energía mecánica en energía electromagnética o viceversa de acuerdo al signo. Si tenemos en cuenta a la energía mecánica,

$$\frac{\mathrm{d}U_{ME}}{\mathrm{d}t} = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V \tag{7.66}$$

luego se tiene que

$$\partial_t(u_{EM} + u_{ME}) + \nabla\cdot\vec{S} = 0. \tag{7.67}$$

Es decir que obtenemos una ley de conservación general en el cual la energía total, electromagnética y mecánica, se conservan. Se pueden transformar entre si, o se puede transportar a través del vector de Poynting pero no puede aparecer ni desaparecer energía total.

7.5 Teorema de Poynting en medios dispersivos

Hasta el momento hemos asumido que los medios son conservativos es decir ϵ and μ son constantes reales. En general la propagación de los campos electromagnéticos en los medios materiales tiene dispersión y pérdidas. Entonces esperamos que aparezcan términos de pérdidas en la ecuación de conservación de la energía. En este caso ϵ depende de la frecuencia y es un número complejo cuya parte real, dependiente de ω, representa la dispersión y la componente imaginaria representa la disipación. Aspectos en los que vamos a profundizar en el próximo capítulo. Comenzamos por expresar a los campos en el espacio espectral

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.68}$$

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{D}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.69}$$

Sabemos entonces que la relación que existe entre el campo eléctrico y el desplazamiento es,

$$\hat{D}(\vec{x},\omega) = \epsilon(\omega)\hat{E}(\vec{x},\omega) \tag{7.70}$$

notar que ésta relación es en el espacio espectral.

Esperamos que en la ecuación de conservación de la energía deberían aparecer nuevos términos que representen las pérdidas y la dispersión en la ecuación. En el razonamiento que ya hicimos para la deducción de la conservación de la energía no es válido ya que

$$\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} \neq \frac{1}{2}\partial_t(\vec{E}\cdot\vec{D}). \tag{7.71}$$

Al desplazamiento lo representamos en el espacio espectral, reemplazando (7.70) en (7.69), lo que resulta en

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\hat{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{7.72}$$

En el espacio físico las cantidades deberían ser reales por lo que tenemos que sumar el complejo conjugado,

$$\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} = \frac{1}{2}(\vec{E}^*\cdot\partial_t\vec{D} + \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D}^*) \tag{7.73}$$

El término del cambio temporal de la densidad de energía electromagnética viene dado por (7.69)

$$\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} = \frac{1}{2}\int\int[-i\omega\epsilon(\omega)]\hat{E}(\omega)\hat{E}^*(\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' + CC \tag{7.74}$$

Es decir que usando (7.73) obtenemos,

$$\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} = \frac{1}{2}\int\int[-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega')]\hat{E}(\omega)\hat{E}^*(\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'. \tag{7.75}$$

Teniendo en cuenta que los campos son reales, vale que $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ y $\epsilon^*(-\omega) = \epsilon(\omega)$, y realizando un desarrollo de Taylor de $\omega\epsilon^*$, se obtiene que

$$i\omega'\epsilon^*(\omega') \approx i\omega\epsilon^*(\omega) + i(\omega'-\omega)\partial_{\omega'}[\omega'\epsilon^*(\omega')]|_{\omega} \tag{7.76}$$

de lo cual se deduce que a primer orden vale

$$-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega') \approx -i\omega[\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega)] + i(\omega-\omega')\partial_{\omega'}[\omega'\epsilon^*(\omega')]|_{\omega} \tag{7.77}$$

Reemplazando (7.77) en (7.75),

$$\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} = \frac{1}{2}\int\int \hat{E}^*(\omega')\hat{E}(\omega)[2\omega Im\epsilon(\omega) - i(\omega-\omega')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\epsilon^*)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' \tag{7.78}$$

el primer término representa la pérdida de energía electromagnética por calor y el segundo término, representa la densidad de energía efectiva.

La ecuación resultante si pensamos en un paquete de ondas con frecuencia ω_0 (es decir la energía esta concentrada alrededor de una frecuencia característica),

$$\partial_t u_{efec} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E} - \omega_0 Im(\epsilon(\omega_0)\langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle) - \omega_0 Im(\mu\langle\vec{H}\cdot\vec{H}\rangle) \tag{7.79}$$

donde la densidad de energía efectiva es

$$u_{efec} = \frac{1}{2}Re\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\epsilon)\right)\langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle + \frac{1}{2}Re\left(\frac{\mathrm{d}\omega\mu(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega}\right)\langle\vec{H}\cdot\vec{H}\rangle \tag{7.80}$$

7.6 Conservación del momento electromagnético

Para demostrar la conservación del momento electromagético comenzamos nuevamente de las ecuaciones de Maxwell. Multiplicando (7.9) producto vectorial por $\epsilon_0\vec{E}$ y (7.10) producto vectorial por $\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\epsilon_0\partial_t\vec{B}\times\vec{E}=0 \tag{7.81}$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\frac{1}{\mu_0c^2}\partial_t\vec{E}\times\vec{B}=\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.82}$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\epsilon_0\partial_t(\vec{E}\times\vec{B})=\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.83}$$

Sumando $\rho\vec{E}$ a ambos lados de la ecuación resulta

$$\epsilon_0\partial_t(\vec{E}\times\vec{B})+\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}=\epsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\epsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\vec{E} \tag{7.84}$$

Definiendo por un lado al momento mecánico por unidad de volumen como

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{ME}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.85}$$

el cual claramente puede ser asociado a la fuerza de Lorenz ejercida por el campo electromagnético sobre la distribución de cargas en movimiento por unidad de volumen. El momento electromagnético por unidad de volumen se define como

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{EM}}{\mathrm{d}t}=\partial_t\epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}). \tag{7.86}$$

Reemplazando estas definiciones en (7.84) resulta

$$\partial_t(\vec{p}_{EM}+\vec{p}_{ME})=\epsilon_0\left\{\left[\vec{E}(\nabla\cdot\vec{E})-\vec{E}\times\nabla\times\vec{E}\right]+c^2\left[(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}\right]\right\} \tag{7.87}$$

Ejercicio 7.6: Expresando en componentes el operador que aparece para el campo electrico en (7.87) y reorganizado términos demostrar que

$$[\vec{E}\nabla\cdot\vec{E}-\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})]_\alpha=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta-\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{7.88}$$

Definimos al tensor de stress electromagnético de segundo orden por

$$T_{\alpha\beta}=\epsilon_0[E_\alpha E_\beta+c^2B_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E}+c^2\vec{B}\cdot\vec{B})\delta_{\alpha\beta}] \tag{7.89}$$

La razón de cambio del momento viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{p}_{EM}+\vec{p}_{ME})_\alpha = \sum_\beta \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} \tag{7.90}$$

donde el tensor de flujo de momento electromagnético $T_{\alpha\beta}$ o tensor de stress de Maxwell lo denotamos como $\overleftrightarrow{T}$ de tal manera que la expresión diferencial queda como una divergencia del tensor:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{p}_{EM}+\vec{p}_{ME})_\alpha = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}. \tag{7.91}$$

Si integramos en un volumen fijo a (7.91) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{EM}+\vec{P}_{ME})_\alpha &= \sum_\beta \int \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta}\mathrm{d}V \quad (7.92)\\ &= \int_S \sum_\gamma T_{\alpha\gamma}u_\gamma \mathrm{d}s \quad (7.93)\end{aligned}$$

expresado en forma vectorial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{P}_{EM}+\vec{P}_{ME}) = \int_S \overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{7.94}$$

Entonces obtenemos una ecuación de conservación integral en la cual el flujo de momento electromagnético entrante o saliente de la región en consideración nos produce cambios en el momento del sistema. Entonces el flujo de momento electromagnético conlleva un stress y de allí la supuesta existencia del eter que se utilizó en el pasado para representar la propagación del campo electromagnético (en el eter) como si fuera un fluido. Los campos electromagnéticos transportan momento!!! y se pueden producir intercambios con el momento mecánico.

Al momento electromagnético lo llamamos

$$\vec{g} = \vec{p}_{EM} = \epsilon_0\mu_0\vec{E}\times\vec{H} \tag{7.95}$$

notar que el flujo de energía, vector de Poynting, $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ por lo que

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}. \tag{7.96}$$

Mas allá que el flujo de densidad de energía y el momento electromagnético puedan ser expresados en función del vector de Poynting se debe tener en claro las profundas diferencias que hay entre los conceptos.

7.6.1 Presión de radiación

Reinterpretando (7.94) vemos que

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{ME} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{EM} + \int_S \overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{7.97}$$

Esta es la fuerza que le ejerce el campo electromagnético a los cuerpos si estos son capaces de absorber o amortiguar totalmente el campo.

Supongamos una onda electromagnética que se propaga en el vacio. La onda en un tiempo δt cubrirá un volumen dado por $(c\delta t)A$ en una sección de área transversal A a la dirección de propagación, el momento de radiación por unidad de volumen es $\vec{g}$.

El momento de radiación adentro del volumen considerado es

$$\vec{P}_{EM} = |\vec{g}|Ac\delta t \tag{7.98}$$

si esta onda es totalmente absorbida por una superficie, una vela absorbente, entonces la superficie sufrirá un impulso ejercido por el momento electromagnético que transportaba la onda, este es denominado presión de radiación y viene dado por

$$pres_{rad} = \frac{F}{A} = c|\vec{g}|. \tag{7.99}$$