# Electromagnetismo 2024

## Guía 0: Repaso de cálculo vectorial

13 de marzo, 2024

**Problema 1:** Haciendo uso de las cantidades $\delta_{ij}$ (delta de Kronecker), y $\epsilon_{ijk}$ (tensor de Levi-Civita) demostrar las siguientes identidades:

(a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

(c) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

(d) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(f) $\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla \phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$

(g) $\nabla(\phi\psi) = \psi\, \nabla\phi + \phi\, \nabla\psi$

(h) $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi$

(i) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$

**Problema 2:** Si $\vec{r}$ es el vector posición del punto (x, y, z), i.e. $\vec{r} = x_i \hat{x}_i$ demuestre:

(a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

(b) $\nabla \times \vec{r} = 0$

(c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$

(d) $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3) = 0$

(e) $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{k}) = \vec{k}$, donde $\vec{k} =$ cons.

**Problema 3:** Si la divergencia de un campo vectorial en un punto dado en distinta de cero, ¿Qué representa ese valor en ese punto para el campo? Buscar algún ejemplo.

**Problema 4:** ¿Cómo se relaciona la dirección del rotacional de un campo vectorial en un punto dado con el plano de circulación del campo en ese punto?. ¿Cómo se relaciona esa circulación con la magnitud y el signo del rotacional en ese punto? Buscar algún ejemplo.

**Problema 5:** Demuestre las siguientes identidades integrales que son de uso frecuente en el electromagnetismo:

(a) $\oint_S \phi \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \phi] \, \mathrm{d}V$

(b) $\oint_S \phi \, \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \nabla\phi \, \mathrm{d}V$ use un campo de la forma $\vec{F} = \phi(\vec{x})\vec{k}$ donde $\vec{k} = \text{cte}$

(c) $\oint_S \vec{r}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\vec{r}(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}] \, \mathrm{d}V$

(d) $\oint_S \phi\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V [\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi] \, \mathrm{d}V$ conocida por 1ra. identidad de Green.

(e) $\oint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) \, \mathrm{d}V$ conocida por 2da. identidad de Green.

**Problema 6:** Demuestre las siguientes propiedades de la distribución delta:

(a) La función $\delta(x)$ es par, $\delta(x) = \delta(-x)$

(b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(c) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \, \delta(g(x)) \, \mathrm{d}x = \sum_i \frac{F(x_i)}{|g'(x_i)|}$ donde los $x_i$ son los ceros de la función $g(x)$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \, \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} \, \mathrm{d}x = (-1)^n \, \frac{d^n F(x)}{dx^n}\Big|_{x=0} \qquad n \geq 0$

**Problema 7:** Demuestre que:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

**Problema 8:** Utilizando la segunda identidad de Green demuestre que:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\left[\int_V \frac{\nabla^2\phi}{r}\mathrm{d}V + \oint_S \left(\phi\partial_n(1/r) - \frac{\partial_n\phi}{r}\right)\mathrm{d}s\right]$$

## Problemas Complementarios

**Problema C.1:** Demuestre el siguiente teorema: "Dado un campo vectorial $\vec{B}$ tal que $\nabla \cdot \vec{B}$ y $\nabla \times \vec{B}$ sea una función/campo acotada, continua, que admita las primeras derivadas parciales continuas en todo el espacio y tienda a cero como $r^{-3}$ para $r \to \infty$, existe siempre la descomposición:

$$\vec{B} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

en un campo irrotacional y otro solenoidal."